Interrogation n° 1

Correction du sujet 1

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -2x^2 + 3x - 1.$$

1. Mettre $f(x)$ sous forme canonique.

$$\begin{aligned}
f(x) &= -2x^2 + 3x - 1 \\
&= -2(x^2 - \frac{3}{2}x) - 1 \\
&= -2\left[x^2 - 2 \times x \times \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right] - 1 \\
&= -2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right] - 1 \\
&= -2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{9}{8} - 1 \\
&= -2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

2. Donner le tableau de variation de f. Justifier.
Comme le coefficient de x^2 est $a = -2 < 0$, la parabole est tournée vers le bas.
D'après la forme canonique de la question 1, le sommet S a pour coordonnées $\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{8}\right)$.
Sinon, $S(\alpha; \beta)$ avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$, et $\beta = \frac{-\Delta}{4a} = f(\alpha)$.

x	$-\infty$		$3/4$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$1/8$	$\searrow$	

3. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \times (-2) \times (-1) = 1 > 0.$
$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - 1}{-4} = 1.$
$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + 1}{-4} = \frac{1}{2}.$

$\boxed{\text{Les solutions de l'équation } f(x) = 0 \text{ sont } \frac{1}{2} \text{ et } 1.}$

4. Donner le tableau de signe de f (justifier).
Le trinôme est du signe de a, (ici $a = -2 < 0$), à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		$1/2$		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

5. On pose $g(x) = x - 5$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$.

$$\begin{aligned}
f(x) &\geqslant g(x) \\
f(x) - g(x) &\geqslant 0 \\
-2x^2 + 3x - 1 - (x - 5) &\geqslant 0 \\
-2x^2 + 2x + 4 &\geqslant 0
\end{aligned}$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \times (-2) \times 4 = 36 > 0.$
$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - 6}{-4} = 2.$
$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + 6}{-4} = -1.$
Le trinôme $(f - g)$ est du signe de a, (ici $a = -2 < 0$), à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\boxed{S = [-1; 2]}$

Bonus (1 point) : Déterminer l'expression d'une fonction f polynôme du second degré dont les racines sont -1 et 3 et dont le maximum est 2.
Il existe un réel a tel que $f(x) = a(x+1)(x-3)$.
De plus, par symétrie de la parabole, l'abscisses du sommet est la moyenne des racines. $\alpha = \dfrac{-1+3}{2} = 1$.
Comme le maximum de f est 2, le sommet a pour coordonnées $S(1;2)$, soit $f(1) = 2$.
D'où $a(1+1)(1-3) = 2$, donc $-4a = 2$, et $a = -\dfrac{1}{2}$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -\dfrac{1}{2}(x+1)(x-3)$.

Interrogation n° 1
Réponses du sujet 2

Exercice 1
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2x^2 + 5x - 3.$$

1. Mettre $f(x)$ sous forme canonique.
$\boxed{f(x) = 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}}$
2. Donner le tableau de variation de f. Justifier.
$S\left(-\frac{5}{4}; -\frac{49}{8}\right)$, et $a = 2 > 0$, la parabole est tournée vers le haut.

x	$-\infty$		$-5/4$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$-49/8$	$\nearrow$	

3. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
$\Delta = 49 > 0$, $S = \left\{-3; \frac{1}{2}\right\}$.
4. Donner le tableau de signe de f (justifier).
$a = 2 > 0$, f est du signe de a à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		-3		$1/2$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

5. On pose $g(x) = 3x + 1$.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$.
$f(x) - g(x) = 2x^2 + 2x - 4$
$\Delta = 36 > 0$.
$x_1 = -2$, et $x_2 = 1$.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\boxed{S =]-\infty; -2] \cup [1; +\infty[}$