Seconde. Interrogation de mathématiques n° 6

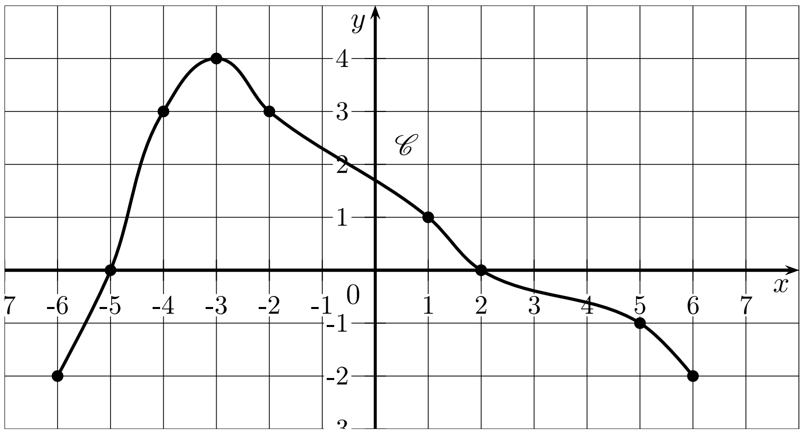
Correction du sujet 1

Exercice 1 (questions de cours, 4 points)

1. Énoncer les trois identités remarquables.
   Pour tous nombres réels a et b,
   (a) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
   (b) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
   (c) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
2. Compléter ci-dessous les formules de cours :
   (a) La proportion de A dans E est $p = \dfrac{n_A}{n_E} = \dfrac{effectif}{effectif\ total}$.
   (b) Le taux de l'évolution de y_1 à y_2 est $t = \dfrac{y_2 - y_1}{y_1}$
   (c) Le taux global t_g de deux évolutions de taux respectifs t_1 et t_2 est donné par la relation : $1 + t_g = (1+t_1)(1+t_2)$.

Exercice 2 (2 points)

On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f.



Donner sans justification :

1. le tableau de variation de f.

x	-6	-3	6
$f(x)$	-2	4	-2

2. le tableau de signe de f.

x	-6		-5		2		6
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 3 (1 point)

Sur l'emballage, il est indiqué que le cacao constitue 70% d'une tablette de 200 g de chocolat. Déterminer la masse de cacao dans la tablette.

$p = \dfrac{n_A}{n_E}$, soit $0,7 = \dfrac{n_A}{200}$, donc $n_A = 200 \times 0,7 = 140$.

$\boxed{\text{Il y a 140 g de cacao dans la tablette.}}$

Exercice 4 (5 points)

Compléter le tableau. On ne demande pas de justifier les résultats.

valeur initiale	valeur finale	taux d'évolution	coefficient multiplicateur	évolution en pourcentage
580	284,2	-0,51	0,49	baisse de 51%
6000	6540	0,09	1,09	hausse de 9 %
250	220	-0,12	0,88	baisse de 12%
7250	5945	-0,18	0,82	baisse de 18 %
250	265	0,06	1,06	hausse de 6 %

Exercice 5 (2 points)

1. Déterminer le taux d'évolution global associé à une hausse de 23 % suivie d'une hausse de 15%.
   $1 + t_g = (1+t_1)(1+t_2) = 1,23 \times 1,15$.
   $t_g = 1,23 \times 1,15 - 1 = 0,4145$.
   $\boxed{\text{Cela revient à une hausse globale de 41,45\%.}}$

2. Après deux remises successives de 20 %, un article est affiché au prix de 415,36 euros.
Quel était le prix initial ?
Le coefficient multiplicateur d'une baisse de 20% est $1-0,2=0,8$. $y_2=(1+t_1)(1+t_2)\times y_1$.
$415,36=(1-0,2)\times(1-0,2)\times y_1=0,8^2\times y_1$.
Donc $y_1=\dfrac{415,36}{0,8^2}=649$.
$\boxed{\text{Le prix initial était de 649 euros.}}$

Exercice 6 (1 point)
Entre 2000 et 2017, les dépenses de santé ont augmenté de 40 % dans l'Union européenne.
Indiquer le taux de l'évolution réciproque (pour revenir au niveau de 2000), en pourcentage. Arrondir à 0,1 % près.
Notons t' le taux de l'évolution réciproque à la hausse de 40% (avec $t=0,4$).
$1+t'=\dfrac{1}{1+t}=\dfrac{1}{1+0,4}=\dfrac{1}{1,4}$.
Donc $t'=\dfrac{1}{1,4}-1\approx-0,2857$.

Pour revenir au niveau de 2000, il faudrait diminuer les dépenses de 28,6 % environ.

Exercice 7 (3 points)
Développer et réduire les expressions suivantes.

1. $\boxed{A(x)=(x+4)^2=x^2+8x+16}$
2. $\boxed{B(x)=\left(\frac{3}{5}x+4\right)\left(\frac{3}{5}x-4\right)=\frac{9}{25}x^2-16}$
3. $C(x)=(2x+5)^2-3(x+1)(x-5)$.
$C(x)=4x^2+20x+25-3(x^2-4x-5)$
$C(x)=4x^2+20x+25-3x^2+12x+15=x^2+32x+40$

Exercice 8 (3 points)
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $D(x)=(5x-1)^2-16$.

1. Développer et réduire $D(x)$.
$\boxed{D(x)=(5x-1)^2-16=25x^2-10x+1-16=25x^2-10x-15.}$
2. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $D(x)=(5x-5)(5x+3)$.
En développant,
$\boxed{(5x-5)(5x+3)=25x^2+15x-25x-15=25x^2-10x-15.}$
3. Résoudre l'équation $D(x)=0$.
(5x-5)(5x+3)=0 ssi ($5x-5=0$ ou $5x+3=0$) ssi ($x=1$ ou $x=-\dfrac{3}{5}$)
$\boxed{S=\{1;\frac{5}{3}\}}$
4. Bonus. Résoudre l'équation $D(x)=-15$.
$D(x)=-15$ ssi $25x^2-10x-15=-15$ ssi $25x^2-10x=0$ ssi $x(25x-10)=0$ ssi ($x=0$ ou $25x=10$) ssi ($x=0$ ou $x=\dfrac{2}{5}$).
$\boxed{S=\{0;\frac{2}{5}\}.}$

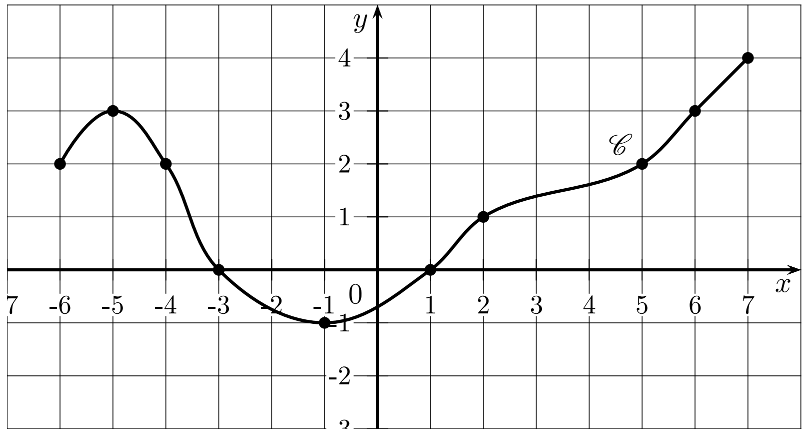
Correction du sujet 2

Exercice 9 (questions de cours, 3 points)

1. Énoncer les trois identités remarquables.
   Pour tous nombres réels a et b,
   (a) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
   (b) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
   (c) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
2. Énoncer le théorème sur équation produit nul.
   Un produit de facteurs est nul ssi l'un des facteurs est nul.
3. Compléter ci-dessous les formules de cours :
   (a) Si t est le taux d'évolution de y_1 à y_2, alors $y_2 = y_1 \times (1+t)$
   (b) Si t est le taux de l'évolution de y_1 à y_2, alors le taux t' de l'évolution réciproque (qui va de y_2 à y_1) est donné par $1 + t' = \dfrac{1}{1+t}$

Exercice 10 (2 points)

On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f.



Donner sans justification :

1. le tableau de variation de f.

x	-6		-5		-1		7
$f(x)$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	4

2. le tableau de signe de f.

x	-6		-3		1		7
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 11 (1 point)

Sur l'emballage, il est indiqué que le cacao constitue 55% d'une tablette de chocolat. Sachant qu'il y a 99 g de cacao, déterminer le poids de la tablette.

$p = \dfrac{n_A}{n_E}$, donc $0,55 = \dfrac{99}{n_E}$, et $n_E = \dfrac{99}{0,55} = 180$.

$\boxed{\text{La tablette pèse 180 g.}}$

Exercice 12 (5 points)

Compléter le tableau. On ne demande pas de justifier les résultats.

valeur initiale	valeur finale	taux d'évolution	coefficient multiplicateur	évolution en pourcentage
580	533,6	-0,08	0,92	baisse de 8 %
6000	7020	0,17	1,17	hausse de 17 %
250	305	0,22	1,22	hausse de 22%
7250	6597,5	-0,09	0,91	baisse de 9 %
1700	1853	0,09	1,09	hausse de 9 %

Exercice 13 (2 points)

1. Déterminer le taux d'évolution global associé à une hausse de 12 % suivie d'une hausse de 23%.
   $1 + t_g = (1+t_1)(1+t_2) = 1,12 \times 1,23$.
   Donc $t_g = 1,12 \times 1,23 - 1 = 0,3776$.
   $\boxed{\text{Cela revient globalement une hausse de 37,76 \%.}}$

2. Après deux remises successives de 10 %, un article est affiché au prix de 552,42 euros.
Quel était le prix initial ?
Le taux d'une baisse de 10 % est $t = -0,1$, et donc le coefficient multiplicateur d'une baisse de 10 % est $c = 1+t = 1-0,1 = 0,9$.
Diminuer de 10% revient à multiplier par 0,9.
En notant y_1 la valeur de départ, et y_2 la valeur finale, on a donc
$$y_2 = 0,9 \times 0,9 \times y_1.$$
Donc $y_1 = \dfrac{y_2}{0,9^2} = \dfrac{552,4}{0,81} = 682$.
$\boxed{\text{Le prix initial était de 682 euros.}}$

Exercice 14 (1 point)
Entre 2000 et 2017, les dépenses de santé ont augmenté de 40 % dans l'Union européenne.
Indiquer le taux de l'évolution réciproque (pour revenir au niveau de 2000), en pourcentage. Arrondir à 0,1 % près.
Notons t' le taux de l'évolution réciproque à la hausse de 40% (avec $t = 0,4$).
$1 + t' = \dfrac{1}{1+t} = \dfrac{1}{1+0,4} = \dfrac{1}{1,4}$.
Donc $t' = \dfrac{1}{1,4} - 1 \approx -0,2857$.

Pour revenir au niveau de 2000, il faudrait diminuer les dépenses de 28,6 % environ.

Exercice 15 (3 points)
Développer et réduire les expressions suivantes.

1. $\boxed{A(x) = (x-6)^2 = x^2 - 12x + 36}$
2. $\boxed{B(x) = \left(\dfrac{1}{4}x + 5\right)\left(\dfrac{1}{4}x - 5\right) = \dfrac{1}{16}x^2 - 25.}$
3. $C(x) = (2x+5)^2 - 3(x+1)(x-5)$.
$C(x) = 4x^2 + 20x + 25 - 3(x^2 - 4x - 5)$
$C(x) = 4x^2 + 20x + 25 - 3x^2 + 12x + 15 = x^2 + 32x + 40$

Exercice 16 (3 points)
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $D(x) = (3x-1)^2 - 49$.

1. Développer et réduire $D(x)$.
$\boxed{D(x) = (3x-1)^2 - 49 = 9x^2 - 6x + 1 - 49 = 9x^2 - 6x - 48.}$
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $D(x) = (3x-8)(3x+6)$.
On développe.
$(3x-8)(3x+6) = 9x^2 + 18x - 24x - 48 = 9x^2 - 6x - 48 = D(x)$.
$\boxed{\text{Donc } D(x) = (3x-8)(3x+6).}$
3. Résoudre l'équation $D(x) = 0$.
On utilise la forme factorisée $D(x) = (3x-8)(3x+6)$.
Un produit de facteurs est nul ssi l'un des facteurs est nul.
$$\begin{aligned} 3x - 8 = 0 &\quad \text{ou} \quad 3x + 6 = 0 \\ x = \frac{8}{3} &\quad \text{ou} \quad x = -2 \end{aligned}$$
$\boxed{\text{Les solutions sont } \dfrac{8}{3} \text{ et } -2.}$
4. Bonus. Résoudre l'équation $D(x) = -48$.
$D(x) = -48$ ssi $9x^2 - 6x - 48 = -48$ ssi $9x^2 - 6x = 0$ ssi $x(9x-6) = 0$ ssi ($x = 0$ ou $9x - 6 = 0$) ssi ($x = 0$ ou $x = \dfrac{2}{3}$).
$\boxed{\text{Les solutions sont 0 et } \dfrac{2}{3}.}$