Correction de l'interrogation de mathématiques n° 4
Sujet 1

Exercice 1 (12 points)

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1$.

1. Déterminer la limite de g en $-\infty$.
   Limite en $-\infty$.
   $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$.
   D'après le cours, $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$.
   $\boxed{\text{Par somme, } \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1.}$
   D'où une asymptote horizontale à $\mathcal{C}_g$ en $-\infty$ d'équation $y = 1$.
2. Déterminer la limite de g en $+\infty$. $g(x) = (1-x)\mathrm{e}^x + 1$.
   $\lim\limits_{+\infty} 1 - x = -\infty$, et $\lim\limits_{+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.
   $\boxed{\text{Par produit et somme, } \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty.}$
3. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$ et donner son tableau de variation.
   La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $g'(x) = \mathrm{e}^x - (\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x) = -x\mathrm{e}^x$.
   Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$, $g'(x)$ est du signe de $-x$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

   $g(0) = 1 - 0 + 1 = 2$.
4. (a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$. On note α cette solution.
   — La fonction g est continue car dérivable sur $[0; +\infty[$;
   — La fonction g est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$, car $g'(x) < 0$ pour $x > 0$ et $g'(0) = 0$;
   — la fonction g change de signe puisque $g(0) = 2 > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
   $\boxed{\text{D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation } g(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ dans } [0; +\infty[.}$
   (b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
   $\boxed{\text{Par balayage, on obtient } 1,27 < \alpha < 1,28.}$
   (c) Démontrer que $\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.
$$\begin{aligned} g(\alpha) &= 0 \\ (1-\alpha)\mathrm{e}^\alpha + 1 &= 0 \\ \mathrm{e}^\alpha(\alpha - 1) &= 1 \\ \mathrm{e}^\alpha &= \frac{1}{\alpha - 1} \end{aligned}$$
   L'écriture de $\dfrac{1}{\alpha - 1}$ a du sens car on sait que $\alpha \neq 1$.
5. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
   D'après les variations de g et le fait que $g(\alpha) = 0$,

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Partie 2

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ par $A(x) = \dfrac{4x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

1. Démontrer que, pour tout x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$ où g est la fonction étudiée dans la partie 1.
   Comme $\mathrm{e}^x + 1 > 0$, la fonction A est définie et dérivable sur $[0; +\infty[$.
$$\begin{aligned} A'(x) &= \frac{4(\mathrm{e}^x + 1) - 4x(\mathrm{e}^x)}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} \\ &= \frac{4\mathrm{e}^x + 4 - 4x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} \\ &= \frac{4g(x)}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} \end{aligned}$$

Comme $(\mathrm{e}^x+1)^2>0$ et $4>0$, $A'(x)$ est du signe de $g(x)$.

2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0;+\infty[$.

x	0		α		$+\infty$
$A'(x)$		$+$	0	$-$	
$A(x)$	0	$\nearrow$	$A(\alpha)$	$\searrow$	0

On a $A(0)=\dfrac{0}{2}=0$.
$A(\alpha)\approx 1,11$.
$A(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\times\dfrac{4}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.
Comme $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}A(x)=0\times 4=0$.

Exercice 2 (5 points)
Les questions sont indépendantes.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^{-3x}$.
   (a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. Justifier.
   $\lim\limits_{x\to+\infty}-3x=-\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-3x}=0$.
   $\lim\limits_{x\to-\infty}-3x=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-3x}=+\infty$.

   (b) Calculer $f'(x)$.
   Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=-3\mathrm{e}^{-3x}$

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{2x+1}}{x}$.
   Pour tout $x\neq 0$, $\dfrac{\mathrm{e}^{2x+1}}{x}=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}\times\mathrm{e}^1}{x}=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}\times\mathrm{e}^x\times\mathrm{e}$.
   On sait que $\mathrm{e}>0$, que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$.
   Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{2x+1}}{x}=+\infty$.

3. Montrer que pour tout réel $x\neq 0$,

$$\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}=\frac{2}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}.$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}&=\frac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+1)-\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-1)}{(\mathrm{e}^x+1)(\mathrm{e}^x-1)}\\&=\frac{\mathrm{e}^x[\mathrm{e}^x+1-\mathrm{e}^x-(-1)]}{\mathrm{e}^{2x}-1}\\&=\frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})}\\&=\frac{2}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}\end{aligned}$$

Exercice 3 (3 points)

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-5x+1$.
   (a) Donner une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{5}{2}x^2+x$.
   (b) En déduire la primitive de f qui vaut 1 en -2.
   Les primitives de f sont de la forme $F_k(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{5}{2}x^2+x+k$ où $k\in\mathbb{R}$.
   $F_k(-2)=1$ ssi $\dfrac{-8}{3}-10-2+k=1$, soit $k=\dfrac{47}{3}$.
   La primitive cherchée est définie par $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{5}{2}x^2+x+\dfrac{47}{3}$.

2. Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions suivantes.
   Aucune justification n'est attendue.
   (a) $a(x)=\dfrac{6x}{\sqrt{3x^2+1}}$.
   $A(x)=2\sqrt{3x^2+1}$.
   (b) $b(x)=x(4x^2-3)^6$.
   $B(x)=\dfrac{1}{56}\times(4x^2-3)^7$.

Sujet 2

Exercice 4
Voir sujet 1

Exercice 5 (5 points)
Les questions sont indépendantes.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \mathrm{e}^{3x-1}.$$
   (a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. Justifier.
   $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{3x-1} = +\infty$.
   $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{3x-1} = 0$.

   (b) Calculer $f'(x)$.
   $f'(x) = 3\mathrm{e}^{3x-1}$.

2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x-3}$.

   Pour tout $x \neq 3$, $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x-3} = \dfrac{\mathrm{e}^{x-3}}{x-3} \times \mathrm{e}^3$.

   D'où, par composée et produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x-3} = +\infty$.

3. Montrer que pour tout réel $x \neq 0$,
$$\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} - \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} = \frac{2}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}.$$
   Voir sujet 1.

Exercice 6 (3 points)

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^3 - x + 11$.

   (a) Donner une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   $F(x) = \dfrac{5}{4}x^4 - \dfrac{1}{2}x^2 + 11x$.

   (b) En déduire la primitive de f qui vaut 1 en -2.
   Les primitives de f sont de la forme $F_k(x) = \dfrac{5}{4}x^4 - \dfrac{1}{2}x^2 + 11x + k$ où $k \in \mathbb{R}$.
   $F_k(-2) = 1$ ssi $20 - 2 - 22 + k = 1$, soit $k = 5$.
   La primitive cherchée est définie par $F(x) = \dfrac{5}{4}x^4 - \dfrac{1}{2}x^2 + 11x + 5$.

2. Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions suivantes. Aucune justification n'est attendue.

   (a) $a(x) = \dfrac{x}{\sqrt{6x^2+5}}$.
   $A(x) = \dfrac{1}{6} \times \sqrt{6x^2+5}$.

   (b) $b(x) = 2x(x^2-1)^3$.
   $B(x) = \dfrac{1}{4}(x^2-1)^4$.