Interrogation n° 1. Correction du sujet 1

Exercice 1 (cours, 2 points)

La forme canonique est $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ ($a \neq 0$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).

Si $a > 0$, alors

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	β	$\nearrow$

Si $a < 0$, alors

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	β	$\searrow$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$.

1. Mettre $f(x)$ sous forme canonique.

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x^2 + 3x - 1 \\ &= -2(x^2 - \frac{3}{2}x) - 1 \\ &= -2\left[x^2 - 2 \times x \times \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right] - 1 \\ &= -2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right] - 1 \\ &= -2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{9}{8} - 1 \\ &= -2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) = -2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{8}.}$$

2. Donner le tableau de variation de f. Justifier.
   Comme le coefficient de x^2 est $a = -2 < 0$, la parabole est tournée vers le bas.
   D'après la forme canonique de la question 1, le sommet S a pour coordonnées $\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{8}\right)$.
   Sinon, $S(\alpha; \beta)$ avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$, et $\beta = \frac{-\Delta}{4a} = f(\alpha)$.

x	$-\infty$	$3/4$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$1/8$	$\searrow$

3. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \times (-2) \times (-1) = 1 > 0$.
   $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-1}{-4} = 1$.
   $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+1}{-4} = \frac{1}{2}$.
   $\boxed{\text{Les solutions de l'équation } f(x) = 0 \text{ sont } \frac{1}{2} \text{ et } 1.}$
4. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = -5x + 7$.
   Montrer que les courbes de f et de g ont un seul point d'intersection, et préciser les coordonnées de ce point.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ -2x^2 + 3x - 1 &= -5x + 7 \\ -2x^2 + 8x - 8 &= 0 \end{aligned}$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times (-2) \times (-8) = 0$.
L'équation $f(x) = g(x)$ admet une seule solution.
$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{-8}{2 \times (-2)} = 2$.
Pour l'ordonnée du point, on calcule $g(2)$ (ou $f(2)$).
$g(2) = -5 \times 2 + 7 = -3$.
$\boxed{\mathscr{C}_f \text{ et } \mathscr{C}_g \text{ se coupent au point } A(2; -3).}$

Exercice 3 (Bonus)

Déterminer l'expression d'une fonction f polynôme du second degré dont la parabole a pour sommet le point $S(-1; 3)$ et passe par le point $A(-5; 7)$.

Comme le sommet est $S(-1; 3)$, il existe un réel a tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x+1)^2 + 3$ (forme canonique).

Comme $A(-5; 7) \in \mathscr{C}_f$, on a de plus $f(-5) = 7$, ce qui donne $a(-5+1)^2 + 3 = 7$, donc $16a = 4$, et $a = \frac{1}{4}$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{4}(x+1)^2 + 3.}$$

Interrogation n° 1. Correction du sujet 2

Exercice 4

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Posons $\Delta = b^2 - 4ac$

— Si $\Delta < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.
— Si $\Delta = 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution qui est $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
— Si $\Delta > 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions réelles distinctes : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$.

1. Mettre $f(x)$ sous forme canonique.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + 5x - 3 \\ &= 2(x^2 + \frac{5}{2}x) - 3 \\ &= 2\left[x^2 - 2 \times x \times \frac{5}{4} + \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2\right] - 3 \\ &= 2\left[\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}\right] - 3 \\ &= 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{8} - \frac{24}{8} \\ &= 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{8} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) = 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}}$$

2. Donner le tableau de variation de f. Justifier.
D'après la forme canonique, le sommet est le point $S\left(-\dfrac{5}{4}; -\dfrac{49}{8}\right)$.
Comme $a = 2 > 0$, la parabole est tournée vers le haut.

x	$-\infty$	$-5/4$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$-49/8$	$\nearrow$

3. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = 49 > 0$.
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5-7}{4} = -3$.
$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5+7}{4} = \dfrac{1}{2}$.
$\boxed{S = \left\{-3; \frac{1}{2}\right\}}$.

4. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = -3x - 11$.
Montrer que les courbes de f et de g ont un seul point d'intersection, et préciser les coordonnées de ce point.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ 2x^2 + 5x - 3 &= -3x - 11 \\ 2x^2 + 8x + 8 &= 0 \end{aligned}$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times (2) \times (8) = 0$.
L'équation $f(x) = g(x)$ admet une seule solution.
$x_0 = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-8}{2 \times 2} = -2$.
Pour l'ordonnée du point, on calcule $g(-2)$ (ou $f(-2)$).
$g(-2) = -3 \times (-2) - 11 = -5$.
$\boxed{\mathscr{C}_f \text{ et } \mathscr{C}_g \text{ se coupent au point } A(-2; -5).}$

Exercice 6 (Bonus (1 point))

Déterminer l'expression d'une fonction f polynôme du second degré dont la parabole a pour sommet le point $S(-1; 3)$ et passe par le point $A(-5; 7)$.
Voir sujet 1.