Correction du Dm3

Exercice 1

On dispose de 3 expressions : $(x-3)^2-(2-5x)(x-3)$;$6x^2-23x+15$;$(x-3)(6x-5)$

1. Montrer que ces 3 expressions définissent une même fonction f.

$$\begin{aligned}(x-3)^2-(2-5x)(x-3) &= (x-3)[(x-3-(2-5x)]\\ &= (x-3)(x-3-2+5x)\\ &= (x-3)(6x-5)\end{aligned}$$

La première expression et la troisième sont égales.

$$\begin{aligned}(x-3)(6x-5) &= 6x^2-5x-18x+15\\ &= 6x^2-23x+15\end{aligned}$$

Donc les 3 expressions sont égales, elles définissent une même fonction f.

2. Déterminer les images de $\frac{5}{2}$, $-\sqrt{2}$, $\frac{5}{6}$ et 0.

$$\begin{aligned}f\left(\frac{5}{2}\right) &= 6\times\left(\frac{5}{2}\right)^2-23\times\frac{5}{2}+15\\ &= 6\times\frac{25}{4}-\frac{115}{2}+\frac{30}{2}\\ &= \frac{3\times 25}{2}-\frac{115}{2}+\frac{30}{2}\\ &= \frac{-10}{2}\\ &= -5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f\left(\frac{5}{6}\right) &= \left(\frac{5}{6}-3\right)\times\left(6\times\frac{5}{6}-5\right)\\ &= \left(\frac{5}{6}-3\right)\times 0\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(0) &= 6\times 0^2-23\times 0+15\\ &= 15\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(-\sqrt{2}) &= 6\times(-\sqrt{2})^2-23\times(-\sqrt{2})+15\\ &= 6\times 2+23\sqrt{2}+15\\ &= 27+23\sqrt{2}\end{aligned}$$

3. Utiliser l'expression adéquate de $f(x)$ pour :

(a) déterminer les antécédents de 15 par f.
On cherche x tel que $f(x)=15$.

$$\begin{aligned}f(x) &= 15\\ 6x^2-23x+15 &= 15\\ 6x^2-23x &= 0\\ x(6x-23) &= 0\end{aligned}$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

$$x=0 \quad\text{ou}\quad 6x-23=0$$
$$x=0 \quad\text{ou}\quad x=\frac{23}{6}$$

$\boxed{\text{Les antécédents de 15 par } f \text{ sont 0 et } \frac{23}{6}.}$

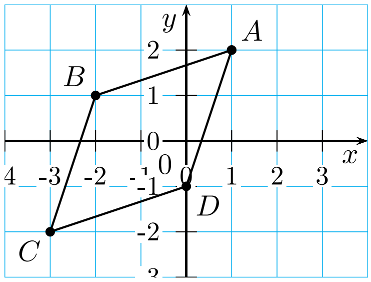
(b) résoudre l'équation $f(x)=0$.

$$\begin{aligned}f(x) &= 0\\ (x-3)(6x-5) &= 0\end{aligned}$$
$$x-3=0 \quad\text{ou}\quad 6x-5=0$$
$$x=3 \quad\text{ou}\quad x=\frac{5}{6}$$

$\boxed{\text{Les solutions sont 3 et } \frac{5}{6}.}$

Exercice 2

1. Dans un repère orthonormé, placer les points $A(1;2)$, $B(-2;1)$, $C(-3;-2)$.



2. Calculer les distances AB et BC.

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(-2-1)^2 + (1-2)^2} \\ &= \sqrt{9+1} \\ &= \sqrt{10} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} BC &= \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} \\ &= \sqrt{(-3+2)^2 + (-2-1)^2} \\ &= \sqrt{1+9} \\ &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc } AB = BC = \sqrt{10}.}$

3. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$.
$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -3+2 \\ -2-1 \end{pmatrix}$, $\boxed{\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}.}$

4. Construire le point D, image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
Cela signifie que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. $\boxed{\text{On place } D(0;-1).}$

5. Retrouver les coordonnées de D par le calcul.
Comme $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, D est tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} x_D - 1 \\ y_D - 2 \end{pmatrix}$. On a vu que $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.
Comme les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont égaux, ils ont les mêmes coordonnées.
$\begin{cases} x_D - 1 = -1 \\ y_D - 2 = -3 \end{cases}$, donc $\begin{cases} x_D = 0 \\ y_D = -1 \end{cases}$. $\boxed{D(0;-1).}$

6. Démontrer que $ABCD$ est un losange.
Comme $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $ABCD$ est un parallélogramme. De plus, on a vu que $AB = BC$.
$ABCD$ est un parallélogramme qui possède deux côtés adjacents de même longueur.
$\boxed{\text{Donc } ABCD \text{ est un losange.}}$

Exercice 3

1. Fonction `vecteur` en Python qui renvoie les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
```
def vecteur(xa,ya,xb,yb):
    return(xb-xa,yb-ya)
```

2. Fonction `parallelogramme` en Python.
```
def parallelogramme(xa,ya,xb,yb,xc,yc,xd,yd):
    if vecteur(xa,ya,xb,yb)==vecteur(xd,yd,xc,yc) :
        return("Le quadrilatère est un parallélogramme")
    else :
        return("Le quadrilatère n'est pas un parallélogramme")
```

3. Tester votre programme dans les deux cas suivants et faire la vérification par le calcul.
   (a) On donne $A(0;3)$, $B(3;5)$, $C(7;3)$, et $D(4;1)$.
   Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$. Conclure.
   $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ et } \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}, ABCD \text{ est un parallélogramme.}}$
   (b) On donne $A(5;5)$, $B(1;6)$, $C(-2;-1)$, et $D(-4;2)$.
   Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$. Conclure.
   $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ et } \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{DC}, ABCD \text{ n'est pas un parallélogramme.}}$