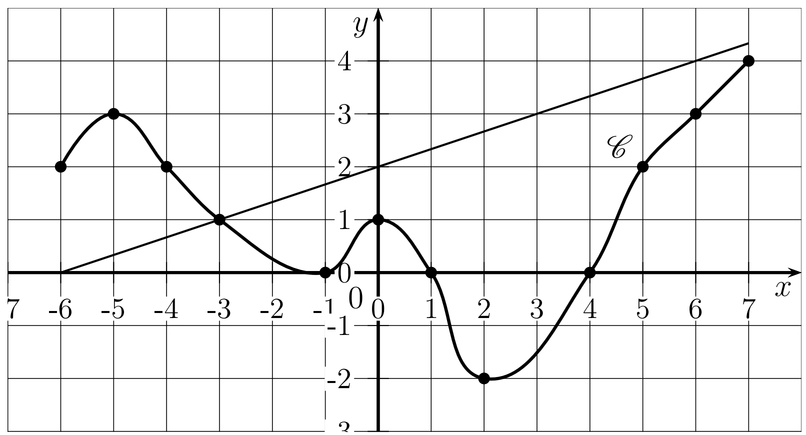
2de. Correction du contrôle de mathématiques n° 3
Sujet 1

Exercice 1 (cours, 2 points)

1. Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
2. Trois formules sur les racines carrées.
   Pour tous réels a et b positifs ou nuls,
   $\sqrt{a}^2 = a$,
   $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$,
   et si de plus $b \neq 0$, $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Exercice 2 (6 points)

On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f.



1. Donner sans justification :
   (a) l'image de 6. $\boxed{f(6) = 3.}$
   (b) les antécédents de 0. Les antécédents de 0 sont -1 ; 1 et 4.
   (c) les solutions de l'équation $f(x) = 3$. $\boxed{S = \{-5; 6\}}$
2. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 2$. Justifier.
   Les solutions sont les abscisses des points de la courbe qui ont une ordonnée strictement supérieure à 2. $S =]-6; -4[\cup]5; 7]$.
3. On considère la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{3}x + 2$ et on admet que sa représentation graphique $\mathscr{C}_g$ est une droite.
   (a) Justifier que $\mathscr{C}_g$ passe par les points $A(0; 2)$ et $B(6; 4)$.
   $g(0) = \dfrac{1}{3} \times 0 + 2 = 2$. Donc $A(0; 2) \in \mathscr{C}_g$.
   $g(6) = \dfrac{1}{3} \times 6 + 2 = 2 + 2 = 4$. Donc $B(6; 4) \in \mathscr{C}_g$.
   (b) Placer A et B et tracer $\mathscr{C}_g$ sur le graphique ci-dessus.
   (c) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$. Justifier.
   Les solutions sont les abscisses des points où $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de $\mathscr{C}_g$. $S = [-6; -3]$.

Exercice 3 (5 points, le détail des calculs doit figurer)

1. Écrire sous la forme d'une puissance d'un seul nombre entier les nombres suivants :
   $A = (2^3)^7 = 2^{3\times 7} = 2^{21}$
   $B = \dfrac{(-3)^2}{(-3)^{-9}} = (-3)^{2-(-9)} = (-3)^{11}$
   $C = \dfrac{5^{-12} \times 5^3}{(5^2)^6} = 5^{-12+3-2\times 6} = 5^{-21}$
   $D = 4^5 \times 3^5 = (4 \times 3)^5 = 12^5$
2. Écrire $E = 6^7 \times 12^{-1}$ sous la forme $2^n \times 3^k$ avec n, $k \in \mathbb{Z}$.
   $E = 6^7 \times 12^{-1} = (2 \times 3)^7 \times (2^2 \times 3)^{-1} = 2^7 \times 3^7 \times 2^{-2} \times 3^{-1}$.
   $E = 2^{7-2} \times 3^{7-1} = 2^5 \times 3^6$.
3. Calculer $F = \dfrac{16 \times 10^{11} \times 21 \times 10^3}{6 \times 10^{-3}}$ et donner le résultat en notation scientifique.
   $F = \dfrac{16 \times 10^{11} \times 21 \times 10^3}{6 \times 10^{-3}} = \dfrac{16 \times 21}{6} \times 10^{11+3-(-3)}$
   $F = \dfrac{2 \times 8 \times 3 \times 7}{2 \times 3} \times 10^{17} = 56 \times 10^{17} = 5,6 \times 10^{18}$

Exercice 4 (3 points, le détail des calculs doit figurer)

1. Déterminer l'écriture simplifiée de $G = \sqrt{45} - 4\sqrt{5} + \sqrt{20}$.
   $G = \sqrt{9 \times 5} - 4\sqrt{5} + \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} - 4\sqrt{5} + \sqrt{4} \times \sqrt{5}$
   $G = 3\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = \sqrt{5}$.
2. Soit ABC un triangle rectangle en A avec $AB = 6\sqrt{3}$ cm et $AC = \sqrt{15}$ cm. Calculer l'aire du triangle ABC (valeur exacte et valeur arrondie au mm^2).
   $Aire = \dfrac{b \times h}{2} = \dfrac{6\sqrt{3} \times \sqrt{15}}{2}$
   $Aire = 3\sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{5} = 3 \times 3\sqrt{5} = 9\sqrt{5} \approx 20,12$.
   L'aire du triangle est $9\sqrt{5}$ cm^2, soit environ 20,12 cm^2 (ou encore environ 2021 mm^2).

Exercice 5 (4 points)

Soit f la fonction définie sur $[-1;3]$ par $f(x) = 2x^2 - 6x + 1$.

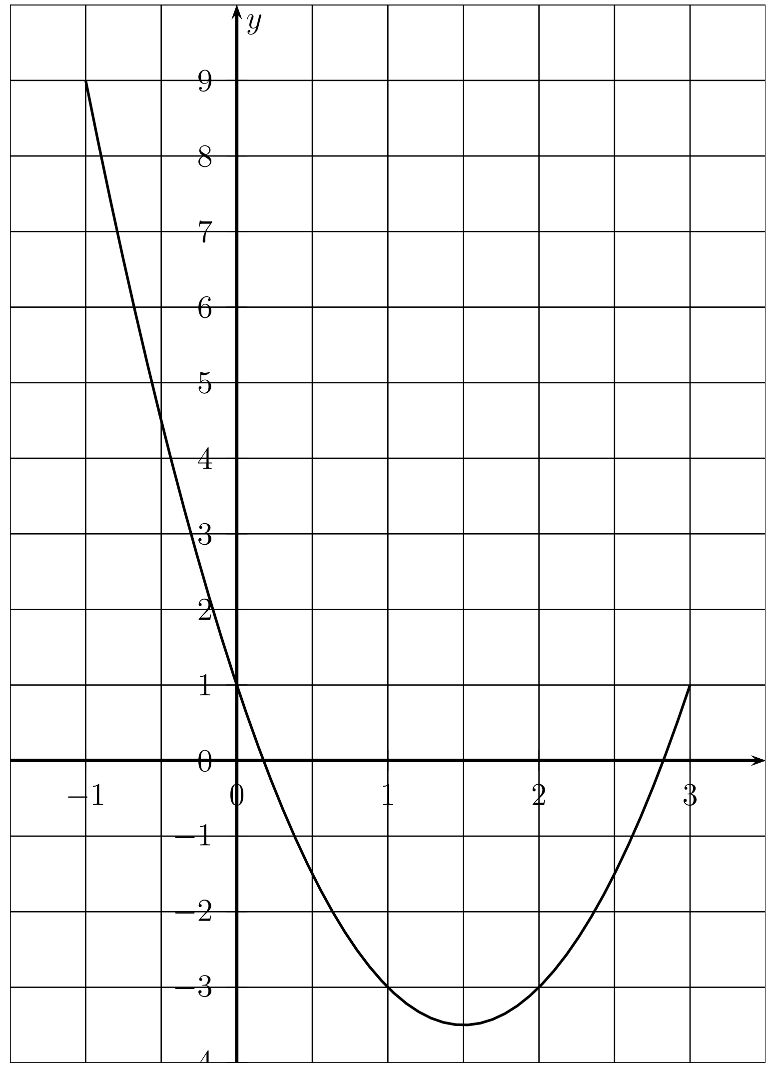
1. Calculer $f(2)$ en écrivant le détail du calcul.
   $\boxed{f(2) = 2 \times 2^2 - 6 \times 2 + 1 = 8 - 12 + 1 = -3.}$
2. (a) À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau de valeurs ci-desous.

x	-1	$-0,5$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$	9	4,5	1	$-1,5$	-3	$-3,5$	-3	$-1,5$	1

   (b) Placer les points du tableau dans le repère ci-dessous et tracer la courbe de f.
3. Le point $R\left(\dfrac{1}{3}; 0,8\right)$ appartient-il à la courbe de f ? Justifier.

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 6 \times \frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{9} - 2 + 1$$
$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9} - \frac{9}{9} = \frac{2-9}{9} = \frac{-7}{9} \neq -0,8$$
$$-\frac{7}{9} \approx 0,7778.$$

L'image de $\dfrac{1}{3}$ n'est pas $-0,8$, donc le point R n'appartient pas à la courbe de f.



Exercice 6 (bonus, 1 point)

Écrire sans racine carrée au dénominateur $\dfrac{3}{4-\sqrt{5}}$. Justifier.

On multiplie au numérateur et au dénominateur par la quantité conjuguée de $4 - \sqrt{5}$ qui est $4 + \sqrt{5}$.

$$\boxed{\frac{3}{4-\sqrt{5}} = \frac{3(4+\sqrt{5})}{(4-\sqrt{5})(4+\sqrt{5})} = \frac{12+3\sqrt{5}}{4^2-5} = \frac{12+3\sqrt{5}}{11}.}$$

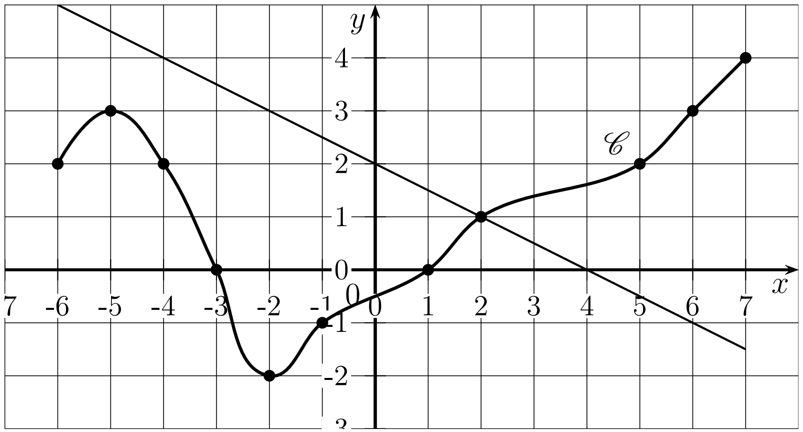
2de. Réponses non détaillées du sujet 2

Exercice 7 (cours, 2 points)

1. $\boxed{\text{Les solutions de l'équation } f(x) = k \text{ sont les absicsses des poitns qui ont une ordonnée égale à } k.}$
2. Rappeler quatre formules du cours portant sur les puissances.
   Pour tout réel a non nul, et $n, p \in \mathbb{Z}$, $a^0 = 1$, $a^1 = a$, $(a^n)^p = a^{np}$, $a^n \times a^p =^{n+p}$.

Exercice 8 (6 points)

On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f.



1. Donner sans justification :
   (a) l'image de -4. $\boxed{f(-4 = 2}$
   (b) les antécédents de 0. $\boxed{\text{Le santécédents de 0 sont } -3 \text{ et } 1.}$
   (c) les solutions de l'équation $f(x) = 3$. $\boxed{S = \{-5; 6\}}$
2. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 0$. Justifier.
   $\boxed{S = [-6; -3[\cup]1; 7].}$
3. On considère la fonction g définie par $g(x) = -\dfrac{1}{2}x + 2$ et on admet que sa représentation graphique $\mathscr{C}_g$ est une droite.
   (a) Justifier que $\mathscr{C}_g$ passe par les points $A(0; 2)$ et $B(4; 0)$.
   $\boxed{f(0) = 2 \text{ et } f(4) = 0. \text{ Donc } \mathscr{C}_g \text{ passe par } A \text{ et } B.}$
   (b) Placer A et B et tracer $\mathscr{C}_g$ sur le graphique ci-dessus.
   (c) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$. Justifier.
   $\boxed{S = [2; 7].}$

Exercice 9 (5 points, le détail des calculs doit figurer sur la copie)

1. Écrire sous la forme d'une puissance d'un seul nombre entier les nombres suivants :
   $A = (3^{-4})^5 = 3^{-20}$ $\qquad$ $B = \dfrac{2^{11}}{2^{-1}} = 2^{12}$
   $C = \dfrac{5^2 \times 5^{-7}}{(5^2)^3} = 5^{-11}$ $\qquad$ $D = 7^8 \times 3^8 = 21^8$
2. Écrire $E = 18^4 \times 12^{-3}$ sous la forme $2^n \times 3^k$ avec $n, k \in \mathbb{Z}$.
   $\boxed{E = 2^{-2} \times 3^5}$
3. Calculer $F = \dfrac{55 \times 10^{-5} \times 36 \times 10^4}{15 \times 10^{17}}$ et donner le résultat en notation scientifique.
   $\boxed{F = 132 \times 10^{-18} = 1,32 \times 10^{-16}}$

Exercice 10 (3 points, le détail des calculs doit figurer sur la copie)

1. Déterminer l'écriture simplifiée de $G = \sqrt{300} - 7\sqrt{3} + \sqrt{12}$.
   $\boxed{G = 5\sqrt{3}.}$
2. Soit ABC un triangle rectangle en A avec $AB = 6\sqrt{3}$ cm et $AC = \sqrt{15}$ cm. Calculer l'aire du triangle ABC (valeur exacte et valeur arrondie au mm^2).
   $Aire = \dfrac{b \times h}{2} = \dfrac{6\sqrt{3} \times \sqrt{15}}{2} = 3\sqrt{3 \times 3 \times 5}3 \times 3\sqrt{5} = 9\sqrt{5} \approx 20,12$.
   $\boxed{\text{L'aire du triangle est } 9\sqrt{5} \text{ cm}^2\text{, soit environ 20,12 cm}^2.}$

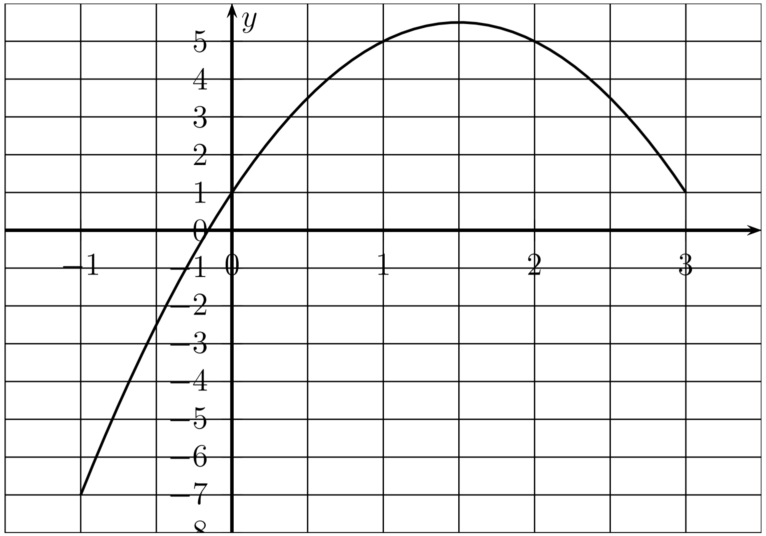
Exercice 11 (4 points)

Soit f la fonction définie sur $[-1; 3]$ par $f(x) = -2x^2 + 6x + 1$.

1. Calculer $f(2)$ en écrivant le détail du calcul.
   $\boxed{f(2) = -2 \times 2^2 + 6 \times 2 + 1 = -8 + 12 + 1 = 5.}$
2. (a) À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau de valeurs ci-desous.

x	-1	$-0,5$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$	-7	$-2,5$	1	3,5	5	5,5	5	3,5	1

(b) Placer les points du tableau dans le repère ci-dessous et tracer la courbe de f.



3. Le point $R\left(\dfrac{1}{3};2,8\right)$ appartient-il à la courbe de f ? Justifier.

$\boxed{f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{25}{9} \approx 2,777\,778, \text{ différent de } 2{,}8.\ R \notin \mathscr{C}_f.}$

Exercice 12 (bonus, 1 point)
Écrire sans racine carrée au dénominateur $\dfrac{3}{4-\sqrt{5}}$. Justifier.

On multiplie au numérateur et au dénominateur par la quantité conjuguée de $4-\sqrt{5}$ qui est $4+\sqrt{5}$.

$$\boxed{\frac{3}{4-\sqrt{5}} = \frac{3(4+\sqrt{5})}{(4-\sqrt{5})(4+\sqrt{5})} = \frac{12+3\sqrt{5}}{4^2-5} = \frac{12+3\sqrt{5}}{11}.}$$