1re G. Correction de l'interrogation de mathématiques n° 5
Sujet 1

Exercice 1 (cours, 1 point)

Soient u et v des fonctions dérivables sur un intervalle I, soit $k \in \mathbb{R}$. Alors

1. $(k \times u)$ est dérivable sur I et $(k \times u)' = k \times u'$
2. Si v ne s'annule pas sur I, alors
$\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Exercice 2 (3 points)

Pour chaque fonction f, donner l'expression de la dérivée $f'(x)$, et en déduire le nombre dérivé $f'(a)$ pour la valeur de a demandée.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$, et $a = -2$.
$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 4x^3, \text{ donc } f'(-2) = 4 \times (-2)^3 = -32.}$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -4x + 7$, et $a = -1$.
$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -4 \text{ donc } f'(-1) = -4.}$
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -5$, et $a = 9$.
$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 0 \text{ donc } f'(9) = 0.}$
4. Pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{1}{x^4}$, et $a = 1$.
On a, pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{1}{x^4} = x^{-4}$.
$\boxed{\begin{array}{l}\text{Pour tout } x > 0,\ f'(x) = -4x^{-4-1} = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}, \\ \text{et } f'(1) = -\frac{4}{1^5} = -4.\end{array}}$

Exercice 3 (2 points)

1. En revenant à la définition du nombre dérivé, montrer que la fonction f définie sur $]5; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3}{x-5}$ est dérivable en 8, et que $f'(8) = -\frac{1}{3}$. Soit $h \neq 0$.
$\frac{f(8+h) - f(8)}{h} = \frac{1}{h} \times \left(\frac{3}{8+h-5} - 1\right) = \frac{1}{h} \times \left(\frac{3}{h+3} - 1\right)$
$= \frac{3 - (h+3)}{h(h+3)} = \frac{-h}{h(h+3)} = \frac{-1}{h+3}$.
Donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(8+h) - f(8)}{h} = -\frac{1}{3}$. $\boxed{f \text{ est dérivable en 8 et } f'(8) = -\frac{1}{3}.}$
2. À l'aide des opérations sur les dérivées, calculer $f'(x)$ pour tout $x > 5$, et retrouver la valeur de $f'(8)$.
Pour tout $x > 5$, $f(x) = 3 \times \frac{1}{x-5}$. On rappelle $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$
Donc, pour tout $x > 5$, $f'(x) = 3 \times \frac{-1}{(x-5)^2} = -\frac{3}{(x-5)^2}$.
$\boxed{f'(8) = -\frac{3}{(8-5)^2} = -\frac{1}{3}.}$

Exercice 4 (3 points)

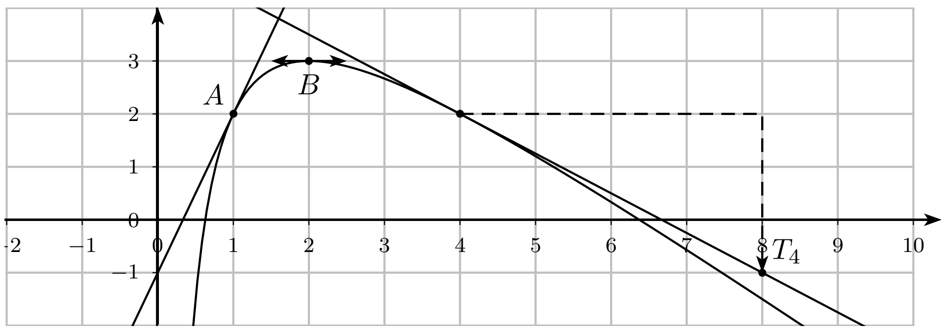
Calculer l'expression de la dérivée des fonctions suivantes.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$.
$\boxed{f'(x) = 4x^3 - 6x^2.}$
2. f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x}$.
$\boxed{f'(x) = 2x\sqrt{x} + (x^2 - 1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2 - 1}{2\sqrt{x}}.}$
3. f est définie sur $]-\infty; 3[$ par $f(x) = \sqrt{6 - 2x}$.
$\boxed{f'(x) = -2 \times \frac{1}{2\sqrt{6-2x}} = -\frac{1}{\sqrt{6-2x}}.}$

Exercice 5 (2,5 points)

On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $]0; +\infty[$. On a tracé les tangentes à la courbe de f aux points A et B.

1. Lire graphiquement $f(1)$ et $f(2)$.
$\boxed{f(1) = 2, \text{ et } f(2) = 3.}$
2. Déterminer deux nombres dérivés de f à l'aide du graphique. Justifier.
$f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1 (point A). $\boxed{\text{On lit } f'(1) = 3.}$
$f'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente en B. Comme elle est parallèle à l'axe des abscisses, son coefficient directeur est nul et donc $\boxed{f'(2) = 0.}$
3. On admet que $f'(4) = -\frac{3}{4}$. Tracer la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 4. Aucune justification n'est attendue.



Exercice 6 (2 points)
La tangente à la courbe de la fonction cube ($f(x) = x^3$) au point d'abscisse 1 passe-t-elle par le point $E(4;11)$? Justifier.
L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est donnée par :
$y = f'(1)(x-1) + f(1) = 3(x-1) + 1 = 3x - 2$.
On étudie si le point $E(4;11)$ appartient à cette droite.
$3x_E - 2 = 3 \times 4 - 2 = 10 \neq y_E$.
$\boxed{\text{Cette tangente ne passe pas par le point } E.}$

Exercice 7 (7 points)
Soit f la fonction définie sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-7}{2x-2}$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Montrer que pour tout $x \neq 1$, $f'(x) = \dfrac{6}{(2x-2)^2}$.
   En posant $u(x) = 4x - 7$, et $v(x) = 2x - 2$, les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et v s'annule pour $x = 1$.
   Donc, par quotient, f est dérivable en tout réel $x \neq 1$. On rappelle la dérivée d'un quotient de 2 fonctions, $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.
   Pour tout $x \neq 1$,
   $f'(x) = \dfrac{4(2x-2) - (4x-7) \times 2}{(2x-2)^2} = \dfrac{8x - 8 - 8x + 14}{(2x-2)^2} = \dfrac{6}{(2x-2)^2}$.
2. Montrer qu'il existe deux points de $\mathscr{C}$ où la tangente à la courbe est parallèle à la droite d'équation $y = 0,5x + 8$. Donner les abscisses de ces deux points (on ne demande pas leurs ordonnées).
   La tangente T_a est parallèle à cette droite ssi elle a le même coefficeint directeur, 0,5. Comme $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente, on résout l'équation $f'(a) = 0,5$.
   $\dfrac{6}{(2x-2)^2} = \dfrac{1}{2}$ ssi $(2x-2)^2 = 12$
   ssi $2x - 2 = -\sqrt{12}$ ou $2x - 2 = \sqrt{12}$
   ssi $2x = 2 - 2\sqrt{3}$ ou $2x = 2 + 2\sqrt{3}$
   ssi $x = 1 - \sqrt{3}$ ou $x = 1 + \sqrt{3}$.
   $\boxed{\text{Il y a deux points de } \mathscr{C} \text{ en lesquels la tangente est parallèle à la droite d'équation } y = 0,5x+8 \text{, ce sont les points d'abscisses } 1+\sqrt{3} \text{ et } 1-\sqrt{3}.}$
   Remarque : à partir de $(2x-2)^2 = 12$, on pouvait aussi développer et résoudre une équation de degré 2 via Δ.
3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe au point d'abscisse 2.
   $f(2) = \dfrac{4 \times 2 - 7}{2 \times 2 - 2} = \dfrac{1}{2}$, et $f'(2) = \dfrac{6}{2^2} = \dfrac{3}{2}$.
   $y = f'(2)(x-2) + f(2) = \dfrac{3}{2}(x-2) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{2}$.
   $\boxed{T \text{ a pour équation } y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{2}.}$
4. Montrer que pour tout réel $x \neq 1$,
   $f(x) - \left(\dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{-3(x-2)^2}{2(x-1)}$.
   $f(x) - \left(\dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{4x-7}{2(x-1)} - \dfrac{3x-5}{2} = \dfrac{4x - 7 - (3x-5)(x-1)}{2(x-1)}$
   $= \dfrac{4x - 7 - (3x^2 - 3x - 5x + 5)}{2(x-1)} = \dfrac{-3x^2 + 12x - 12}{2(x-1)}$
   $= \dfrac{-3(x^2 - 4x + 4)}{2(x-1)} = \dfrac{-3(x-2)^2}{2(x-1)}$
5. En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la tangente T.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$-3/2$		$-$		$-$		$-$	
$(x-2)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-3(x-2)^2}{2(x-1)}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$-$	

Ainsi, $f(x) - \left(\dfrac{3}{2}x - \dfrac{5}{2}\right) > 0$ ssi $x \in]-\infty;1[$.

$\boxed{\mathscr{C} \text{ est au-dessus de } T \text{ sur }]-\infty;1[\text{, et en dessous de } T \text{ sur }]1;+\infty[.}$

Réponses non détaillées du sujet 2

Exercice 8 (cours, 1 point)

Compléter sur l'énoncé. Opérations sur les dérivées.
Soient u et v des fonctions dérivables sur un intervalle I, soit $k \in \mathbb{R}$. Alors

1. $(u \times v)$ est dérivable sur I et $(u \times v)' = u'v + uv'$
2. Si v ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{1}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{-v'}{v^2}$

Exercice 9 (3 points)

Pour chacune des fonctions f, donner l'expression de la dérivée $f'(x)$, et en déduire le nombre dérivé $f'(a)$ pour la valeur de a demandée.

1. Pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$, et $a = -2$.

   Pour tout $x > 0$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, donc $f'(-2) = -\dfrac{1}{(-2)^2} = -\dfrac{1}{4}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 7$, et $a = -1$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2$, donc $f'(-1) = 2$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{2}$, et $a = 11$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$, donc $f'(11) = 0$.
4. Pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$, et $a = 1$.

   Pour tout $x > 0$, $f(x) = x^{-3}$, donc
   $f'(x) = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = -\dfrac{3}{x^4}$, puis $f'(1) = -\dfrac{3}{1^4} = -3$.

Exercice 10 (2 points)

1. En revenant à la définition du nombre dérivé, montrer que la fonction f définie sur $]-\infty; 1[$ par $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$ est dérivable en -1, et que $f'(-1) = -\dfrac{1}{2}$.

   Soit $h \neq 0$.
   $$\frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \frac{1}{h} \times \left(\frac{2}{-1+h-1} - (-1)\right)$$
   $$= \frac{1}{h} \times \left(\frac{2}{h-2} + 1\right) = \frac{2 + (h-2)}{h(h-2)} = \frac{h}{h(h-2)} = \frac{1}{h-2}.$$
   Donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = -\dfrac{1}{2}$.

   Donc f est dérivable en -1 et $f'(-1) = -\dfrac{1}{2}$.
2. À l'aide des opérations sur les dérivées, calculer $f'(x)$ pour tout $x < 1$, et retrouver la valeur de $f'(-1)$.

   Pour tout $x < 1$, $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$, donc $f'(-1) = \dfrac{-2}{(-2)^2} = -\dfrac{1}{2}$.

Exercice 11 (3 points)

Calculer l'expression de la dérivée des fonctions suivantes.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^5 + 8x^3 + 2x - 4$.

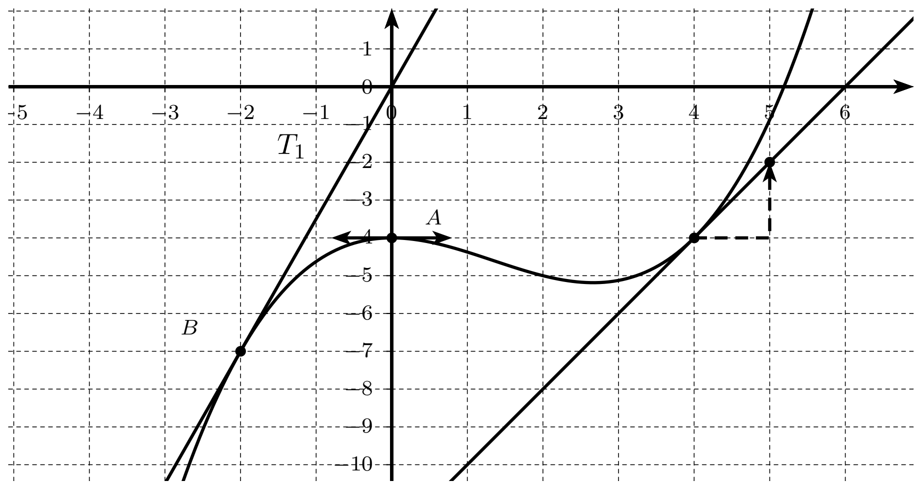
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -5x^4 + 24x^2 + 2$.
2. f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = (3 - 2x)\sqrt{x}$.

   Pour tout $x > 0$, $f'(x) = -2\sqrt{x} + (3 - 2x)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
3. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (5x - 6)^3$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 5 \times 3(5x-6)^2 = 15(5x-6)^2$.

Exercice 12 (2,5 points)

On a tracé ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
La droite T_1 est tangente à la courbe en B, et la courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point A.



1. Déterminer graphiquement deux nombres dérivés de f. Justifier.

$\boxed{\begin{array}{l} f'(a) \text{ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse } a. \\ f(0)=0, \text{ et } f'(-2)=3,5. \end{array}}$

2. On admet que $f'(4)=2$. Tracer la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 4. Aucune justification n'est attendue.

Exercice 13 (2 points)

La tangente à la courbe de la fonction cube ($f(x)=x^3$) au point d'abscisse 1 passe-t-elle par le point $E(4;11)$? Justifier.

Voir sujet 1

Exercice 14 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;-3[\cup]-3;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3x-1}{2x+6}$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Montrer que pour tout $x\neq -3$, $f'(x)=\dfrac{20}{(2x+6)^2}$.

   En posant $u(x)=3x-1$, et $v(x)=2x+6$, les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et v s'annule pour $x=-3$.
   Donc, par quotient, f est dérivable en tout réel $x\neq-3$. On rappelle la dérivée d'un quotient de 2 fonctions, $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.
   Pour tout $x\neq -3$,
   $f'(x)=\dfrac{3(2x+6)-(3x-1)\times 2}{(2x+6)^2}=\dfrac{6x+18-6x+2}{(2x+6)^2}=\dfrac{20}{(2x+6)^2}$.

2. Montrer qu'il existe deux points de $\mathscr{C}$ où la tangente à la courbe est parallèle à la droite d'équation $y=x+8$. Donner les abscisses de ces deux points (on ne demande pas leurs ordonnées).

   La tangente T_a est parallèle à cette droite ssi elle a le même coefficient directeur, 1. Comme $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente, on résout l'équation $f'(a)=1$.
   $\dfrac{20}{(2x+6)^2}=1$ ssi $(2x+6)^2=20$
   ssi $2x+6=-\sqrt{20}$ ou $2x+6=\sqrt{20}$
   ssi $2x=-6-2\sqrt{5}$ ou $2x=-6+2\sqrt{5}$
   ssi $x=-3-\sqrt{5}$ ou $x=-3+\sqrt{5}$.

   $\boxed{\text{Il y a deux points de } \mathscr{C} \text{ en lesquels la tangente est parallèle à la droite d'équation } y=x+8, \text{ ce sont les points d'abscisses } -3-\sqrt{5} \text{ et } -3+\sqrt{5}.}$

3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe au point d'abscisse -1.

   $f(-1)=\dfrac{-4}{4}=-1$, et $f'(-1)=\dfrac{20}{4^2}=\dfrac{5}{4}$.
   $y=f'(-1)(x+1)+f(-1)=\dfrac{5}{4}(x+1)-1=\dfrac{5}{4}x+\dfrac{1}{4}$.

   $\boxed{T \text{ a pour équation } y=\dfrac{5}{4}x+\dfrac{1}{4}.}$

4. Montrer que pour tout réel $x\neq-3$, $f(x)-\left(\dfrac{5}{4}x+\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{-5(x+1)^2}{4(x+3)}$.

   $f(x)-\left(\dfrac{5}{4}x+\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{3x-1}{2(x+3)}-\dfrac{5x+1}{4}=\dfrac{2(3x-1)-(5x+1)(x+3)}{4(x+3)}$
   $=\dfrac{6x-2-(5x^2+15x+x+3)}{4(x+1)}=\dfrac{-5x^2-10x-5}{4(x+3)}$
   $=\dfrac{-5(x^2+2x+1)}{4(x+3)}=\dfrac{-5(x+1)^2}{4(x+3)}$

5. En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la tangente T.

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$-5/4$		$-$		$-$		$-$	
$(x+1)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-5(x+1)^2}{4(x+3)}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$-$	

Ainsi, $f(x)-\left(\dfrac{5}{4}x+\dfrac{1}{4}\right)>0$ ssi $x\in]-\infty;-3[$.

$\boxed{\mathscr{C} \text{ est au-dessus de } T \text{ sur }]-\infty;-3[, \text{ et en dessous de } T \text{ sur }]-3;+\infty[.}$