NOM(S) :
Prénom(s) :

Devoir maison n° 1

À rendre le mardi 12 septembre 2017

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $I = [0;1]$ par

$$f(x) = \frac{3x+2}{x+4}.$$

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

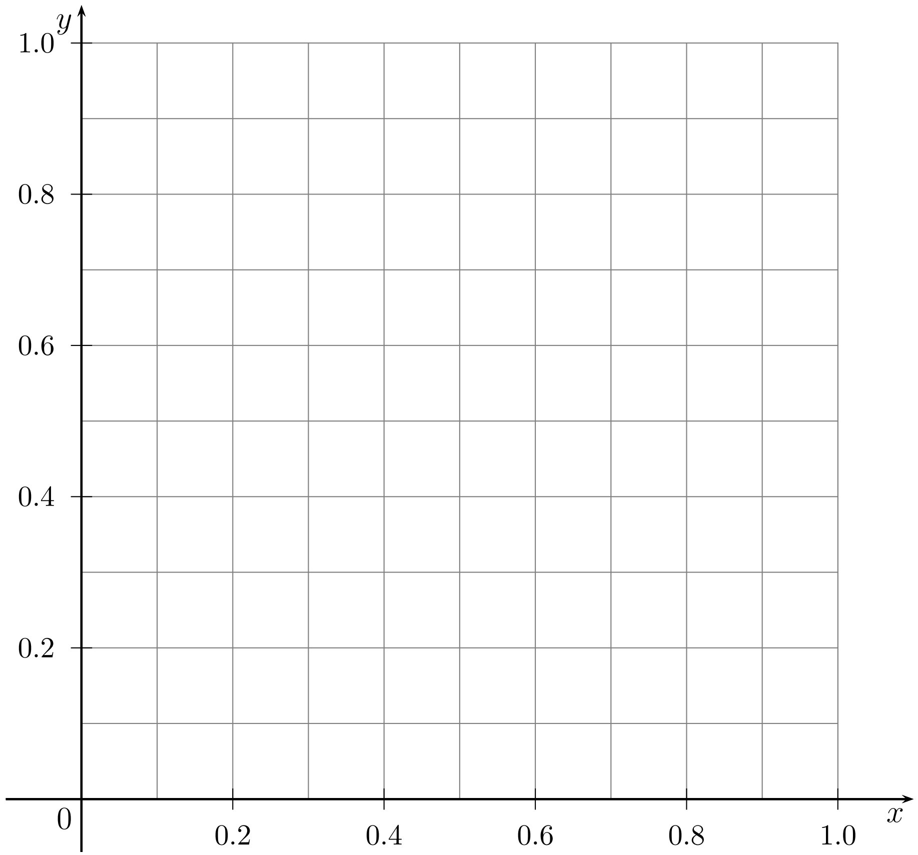
Partie A

1. Étudier les variations de f sur $[0;1]$.
2. En déduire que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$.
3. Représenter graphiquement la fonction f dans le repère ci-contre.
4. En utilisant le graphique précédent, construire les points A_0, A_1, A_2, A_3, d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2, u_3.
5. Que peut-on conjecturer sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?
6. On admet que pour tout entier n, $u_n \in [0;1]$.
   Montrer que pour tout entier n,
   $$u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$$
   et en déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Partie B

On considère la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

1. Prouver que la suite v est géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$.
2. Calculer v_0 et exprimer v_n en fonction de n.
3. Exprimer u_n en fonction de v_n, puis u_n en fonction de n.
4. On admet que (u_n) tend vers 1.
   Écrire un algorithme qui détermine et affiche le plus petit entier n_0 tel que $u_{n_0} > 0,999\,99$. Donner la valeur de n_0.



Indications :
A1 : dériver la fonction f.
A4 : s'aider de la droite d'équation $y = x$.