1G. Correction du devoir n° 2 bis

Exercice 1 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$. Justifier.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 9 + 4 \times 2 \times 2 = 25 > 0$.
   $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3-5}{4} = -\dfrac{1}{2}$. $\qquad x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3+5}{4} = 2$.
   $\boxed{S = \left\{-\dfrac{1}{2}; 2\right\}}$
2. Dresser le tableau de signe de f. Justifier.
   On a vu que $\Delta > 0$. Le trinôme prend alors le signe de a à l'extérieur des racines. Ici, $a = 2 > 0$. Ainsi,

x	$-\infty$		$-1/2$		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. Déterminer le tableau de variation de f. Justifier.
   $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{3}{4}$. $\qquad \beta = \dfrac{-\Delta}{4a} = -\dfrac{25}{8}$.
   Le sommet de la parabole a pour coordonnées $S\left(\dfrac{3}{4}; -\dfrac{25}{8}\right)$.
   Comme $a = 2 > 0$, la parabole est tournée vers le haut.

x	$-\infty$		$3/4$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$-25/8$	$\nearrow$	

4. En déduire le meilleur encadrement de $f(x)$ lorsque $-1 \leq x \leq 3$. Justifier.
   $f(-1) = 2 + 3 - 2 = 3$. $\qquad f(3) = 18 - 9 - 2 = 7$.
   Sur l'intervalle $[-1; 3]$, le tableau de variation est le suivant :

x	-1		$3/4$		3
$f(x)$	3	$\searrow$	$-25/8$	$\nearrow$	7

   Comme le minimum est de $-\dfrac{25}{8}$ et le maximum de 7, on obtient :
   $\boxed{\text{Pour tout } x \in [-1; 3],\ -\dfrac{25}{8} \leqslant f(x) \leqslant 7.}$
5. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et de la droite (d) d'équation $y = -5x + 2$.
   On étudie le signe de $f(x) - (-5x + 2)$.
   $f(x) - (-5x + 2) = 2x^2 - 3x - 2 + 5x - 2 = 2x^2 + 2x - 4$.
   $\Delta = 36 > 0$, puis les racines sont -2 et 1.
   Le trinôme $f(x) - (-5x + 2)$ est positif (signe de a) à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f(x) - (-5x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Donc $\mathscr{C}$ est au-dessus de (d) sur $]\infty; -2[\cup]1; +\infty[$.
   Et $\mathscr{C}$ est en-dessous de (d) sur $]-2; 1[$.

Exercice 2 (5 points)

Une carte de vœux rectangulaire, de dimensions 6 cm et 10 cm, comporte un carré et un rectangle colorés représentés ici par des hachures. Afin de minimiser la quantité d'encre pour la partie colorée, on souhaite que la partie blanche soit la plus grande possible.
On note x le côté du carré coloré.

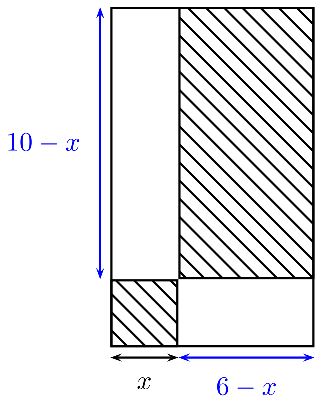
1. Justifier que l'aire colorée est donnée par $f(x) = 2x^2 - 16x + 60$.
   La partie colorée est formée d'un rectangle de dimensions $(10 - x)$ et $(6 - x)$, et d'un carré de côté x.
   Notons $f(x)$ son aire. La fonction f est définie sur $[0; 6]$.
   $\boxed{\text{On a } f(x) = x^2 + (10 - x)(6 - x) = 2x^2 - 16x + 60.}$
2. Déterminer pour quelles valeurs de x l'aire colorée ne dépasse pas la moitié de la surface totale.
   $\dfrac{10 \times 6}{2} = 30$.
   La moitié de l'aire totale représente 30 cm^2.
   On résout l'inéquation $2x^2 - 16x + 60 \leqslant 30$, soit $2x^2 - 16x + 30 \leqslant 0$, ou encore $x^2 - 8x + 15 \leqslant 0$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 4 \times 15 = 4 = 2^2 > 0$.
   $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{8-2}{2} = 3$.
   $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{8+2}{2} = 5$.
   Les deux racines appartiennent à l'intervalle $[0; 6]$.
   Le trinôme prend le signe de a à l'extérieur des racines.

x	0		3		5		6
$x^2-8x+15$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\boxed{\text{L'aire colorée ne dépasse pas la moitié de la surface de la carte pour } x \in [3;5].}$

3. Déterminer les dimensions du carré et du rectangle colorés pour que l'aire colorée soit minimale.
   On cherche à rendre f minimale. C'est une fonction du second degré.
   Comme $a = 2 > 0$, la parabole est tournée vers le haut.
   $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{16}{2\times 2} = 4$. (on note que $4 \in [0;6]$)
   Donc f prend sa valeur minimale lorsque $x = 4$.
   La partie hachurée est formée d'un carré de côté x, et d'un rectangle de dimensions $(10-x)$ et $(6-x)$.

   $\boxed{\text{La partie colorée est minimale lorsqu'elle est constituée d'un carré de côté 4 cm et d'un rectangle de dimensions 6 cm et 2 cm.}}$



Exercice 3 (5 points)

1. Soit (a_n) la suite définie pour tout entier n par $a_n = \left(\dfrac{n}{1+2n}\right)^2$. Calculer a_0, a_1 et a_2.
   $a_0 = \left(\dfrac{0}{1+2\times 0}\right)^2 = 0^2 = 0$.
   $a_1 = \left(\dfrac{1}{1+2\times 1}\right)^2 = \dfrac{1}{9}$.
   $a_2 = \left(\dfrac{2}{1+2\times 2}\right)^2 = \dfrac{4}{25}$.
2. Soit (b_n) la suite définie par $b_0 = 2$ et pout tout $n \geqslant 0$, $b_{n+1} = \dfrac{3}{2}b_n + \dfrac{1}{2}$.
   Calculer b_1 et b_2.
   $b_1 = \dfrac{3}{2}b_0 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}\times 2 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{2}$.
   $b_2 = \dfrac{3}{2}b_1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}\times\dfrac{7}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{23}{4}$.
3. Soit (c_n) la suite définie par $c_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = c_n + 6n - 1$. Calculer c_1 et c_2.
   $c_1 = c_0 + 6\times 0 - 1 = 3 + 0 - 1 = 2$.
   $c_2 = c_1 + 6\times 1 - 1 = 2 + 6 + -1 = 7$.
4. Soit (d_n) la suite définie par $d_0 = 2$, $d_1 = 5$, et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $d_{n+2} = 3d_{n+1} + d_n$.
   Calculer d_2 et d_3.
   $d_2 = 3d_1 + d_0 = 3\times 5 + 2 = 17$.
   $d_3 = 3d_2 + d_1 = 3\times 17 + 5 = 56$.
5. Soit (k_n) la suite définie par son premier terme $k_0 = 3$ et pout tout entier $n \geqslant 0$, $k_{n+1} = 1 + \dfrac{4}{5}k_n$.
   $k_{10} \approx 4,785$. À l'aide de la calculatrice, donner k_{10} arrondi à 10^{-3}. Aucune justification n'est demandée.

Exercice 4 (2 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 6$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n + 13n$.
Compléter la fonction Python d'argument n qui renvoie la valeur de u_n pour tout entier $n \geqslant 0$.

```
def Terme(n) :
    u=6
    for k in range(1,n+1):
        u=5*u+13*(k-1)
    return(u)
```

Exercice 5 (2 points)

Déterminer tous les réels a tels que l'équation $ax^2 + 13x + 1 = 0$ n'ait pas de solution réelle.
$\Delta = b^2 - 4ac = 13^2 - 4\times a\times 1 = 169 - 4a$.
L'équation n'a pas de solution ssi $\Delta < 0$ ssi $169 - 4a < 0$ ssi $-4a < -169$ ssi $a > \dfrac{169}{4}$.
Attention, à la dernière étape du calcul, on divise par $-4 < 0$, ce qui change le sens de l'inégalité.

$\boxed{\text{L'équation n'a pas de solution lorsque } a > \dfrac{169}{4}.}$