Chapitre 8 : Calcul littéral - Équations produits

I Factorisation et développement

Rappel :
Une expression est développée si l'opération principale (à l'extérieur des parenthèses) est une addition ou une soustraction.
Une expression est factorisée si l'opération principale (à l'extérieur des parenthèses) est une multiplication ou une division.

Exercice 1 (reconnaître la nature d'une expression)
L'expression $\dfrac{5x}{2x-1} - 5$ est ....
C'est ....
L'expression $\dfrac{-4}{2x-1}$ est ....
C'est ....

Propriété
Pour tous nombres réels a, b, c, d et k,

$$\begin{aligned} k(a+b) &= \\ (a+b)(c+d) &= \end{aligned}$$

Exercice 2
Développer et réduire les expressions suivantes.

1. $A(x) = 5x(2x^3 - 4)$.
2. $B(x) = (7 - 3x)(11 + x^2)$
3. $C(x) = 4 - 3(x + 2)(x + 5)$

Théorème (identités remarquables)
Pour tous nombres réels a et b,

1. $(a + b)^2 =$
2. $(a - b)^2 =$
3. $(a + b)(a - b) =$

Remarque
Les identités remarquables permettent de passer d'une forme développée à une forme factorisée, et inversement.

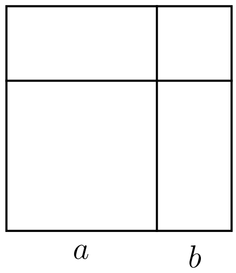
Exercice 3
Développer

1. $(x + 5)^2$
2. $(2x - 9)^2$
3. $(4x - \sqrt{3})(4x + \sqrt{3})$

Démonstration
On développe les expressions factorisées. Pour tous réels a et b,

1. $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
2. $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2$.

Illustration géométrique de la première identité remarquable.
Pour des nombres a et b positifs, $(a+b)^2$ est l'aire du carré de côté $(a+b)$.
Par découpage, on observe que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.



II Équations

II.1 Équations produits

Théorème
Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.
Autre formulation : $A \times B = 0$ ssi $A = 0$ ou $B = 0$

Méthode pour les équations produits :

1. Faire apparaître 0.
2. Factoriser.
3. Conclure avec le théorème.

Exercice 4
Résoudre l'équation $4x^2 = 5x$.

Remarque
Pour factoriser une expression, on cherche un facteur commun ou une identité remarquable.

II.2 Équations quotients

Propriété
Soient A et B deux fonctions de la variable réelle.
L'équation $\dfrac{A(x)}{B(x)} = 0$ est définie lorsque $B(x) \neq 0$.
Alors, $\dfrac{A(x)}{B(x)} = 0$ équivaut à $A(x) = 0$.

Exercice 5
Résoudre l'équation $\dfrac{x^2 - 4x}{x + 7} = 0$.