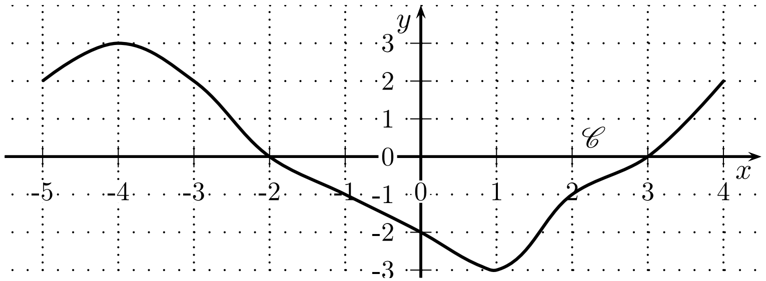
1re STI. Correction du contrôle n° 1.

Exercice 1 (7 points)
On donne ci-dessous la courbe d'une fonction f.



1. Donner l'ensemble de définition de f.
$\boxed{f \text{ est définie sur} [-5;4]}$
2. Déterminer les images de -3 et 2.
$\boxed{f(-3) = 2, \text{ et } f(2) = -1.}$
3. Déterminer les antécédents de 1.
$\boxed{\text{Les antécédents de 1 sont environ } -2,5 \text{ et environ } 3{,}5.}$
4. Dresser le tableau de variation de f.

x	-5		-4		1		4
$f(x)$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2

5. Résoudre l'équation $f(x) = 2$.
$\boxed{S = \{-5; -3; 4\}}$
6. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > -1$.
$\boxed{S = [-5; -1[\cup]2; 4]}$
7. Dresser le tableau de signe de f.

x	-5		-2		3		4
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

8. Déterminer le taux de variation de f entre -4 et 1.
$$\boxed{T(-4;1) = \frac{f(-4) - f(1)}{-4-1} = \frac{3-(-3)}{-5} = -\frac{6}{5} = -1,2.}$$

Exercice 2 (5,5 points)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 10x - 8$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (3x-2)(x+4)$.
En développant,
$\boxed{(3x-2)(x+4) = 3x^2 + 12x - 2x - 8 = 3x^2 + 10x - 8 = f(x).}$
2. Le point $A(1;5)$ appartient-il à la courbe de f ? Justifier par un calcul.
$\boxed{f(1) = 3 + 10 - 8 = 5. \text{ Donc } A(1;5) \in \mathscr{C}_f.}$
3. Calculer le taux d'accroissement de f entre 1 et 3.
On a vu que $f(1) = 5$.
$f(3) = 3 \times 3^2 + 10 \times 3 - 8 = 27 + 30 - 8 = 49.$
$$\boxed{T(1;3) = \frac{f(1) - f(3)}{1-3} = \frac{5-49}{-2} = \frac{-44}{-2} = 22.}$$
4. Déterminer par le calcul les antécédents de 0 par f.
$f(x) = 0$ ssi $(3x-2)(x+4) = 0$ ssi $[3x - 2 = 0$ ou $x + 4 = 0]$ ssi $[x = \frac{2}{3}$ ou $x = -4.]$
$$\boxed{\text{Les antécédents de 0 sont } \frac{2}{3} \text{ et } -4.}$$

Exercice 3 (2,5 points)
Trouver l'expression de la fonction affine dont la droite représentative passe par les points $A(-1;4)$ et $B(5;2)$.
$f(x) = mx + p$. La pente m est donnée par :
$m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - y_A} = \dfrac{2-4}{5+1} = -\dfrac{1}{3}.$
Donc $f(x) = -\dfrac{1}{3}x + p.$
Comme $A(-1;4) \in \mathscr{C}_f$, $f(-1) = 4$, soit $4 = -\dfrac{1}{3} \times (-1) + p$,
$p = 4 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{12-1}{3} = \dfrac{11}{3}.$
$$\boxed{\text{Donc pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}.}$$

Exercice 4 (5 points)
On considère la fonction f définie sur $]-2;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{-4}{x+2}$, et deux réels distincts a et b de l'intervalle $]-2;+\infty[$.

1. Exprimer le taux de variation de f entre a et b. Montrer que

$$T(a;b)=\frac{4}{(a+2)(b+2)}.$$

$$T(a;b)=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{\dfrac{-4}{a+2}-\dfrac{-4}{b+2}}{a-b}$$
$$T(a;b)=\frac{-4(b+2)-(-4)(a+2)}{(a+2)(b+2)}\times\frac{1}{a-b}$$
$$T(a;b)=\frac{-4b+4a}{(a+2)(b+2)}\times\frac{1}{a-b}$$
$$T(a;b)=\frac{4(a-b)}{(a+2)(b+2)(a-b)}=\frac{4}{(a+2)(b+2)}.$$

2. En déduire les variations de la fonction f sur $]-2;+\infty[$.
Comme $a\in]-2;+\infty[$, $a>-2$, et donc $a+2>0$.
De même, $b\in]-2;+\infty[$, $b>-2$, donc $b+2>0$.
Par produit et quotient de nombres tous strictement positifs,
$T(a;b)=\dfrac{4}{(a+2)(b+2)}>0.$
Donc f est strictement croissante sur $]-2;+\infty[$.

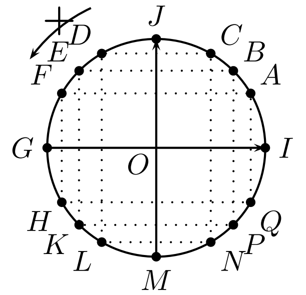
Exercice 5 (1,5 points)

1. Déterminer la valeur exacte de la mesure en radians d'un angle géométrique dont la mesure en degrés est 50 °.
$50\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{5\pi}{18}.$ $\boxed{50\ °=\dfrac{5\pi}{18}\text{ rad.}}$

2. Déterminer la valeur exacte de la mesure en degrés d'un angle géométrique dont la mesure en radians est $\dfrac{5\pi}{8}$.
$\dfrac{5\pi}{8}\times\dfrac{180}{\pi}=\dfrac{5\times180}{8}=\dfrac{5\times2\times2\times45}{2\times2\times2}=\dfrac{5\times45}{2}=\dfrac{225}{2}=112,5.$
$\boxed{\dfrac{5\pi}{8}\text{ rad}=112{,}5\ °.}$

Exercice 6 (5 points)

1. Compléter le tableau sur l'énoncé.



Nombre réel x	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	5π	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{27\pi}{4}$
Image sur le cercle	J	P	D	F	G	K	N	E

2. Donner trois nombres réels différents qui ont pour image le point B :
$\dfrac{\pi}{4}$; $\dfrac{9\pi}{4}$; $\dfrac{17\pi}{4}$.

3. Donner la mesure principale des angles orientés suivants :
$(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})=-\dfrac{\pi}{2}$ $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OJ})=\dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 7 (1 point)
Déterminer si les nombres réels a et b ont la même image sur le cercle trigonométrique. Justifier.
$a=\dfrac{52\pi}{9}$ et $b=\dfrac{25\pi}{9}$.
$a-b=\dfrac{52\pi}{9}-\dfrac{25}{9}=\dfrac{27\pi}{9}=3\pi$ qui n'est pas multiple de 2π.
$\boxed{a \text{ et } b \text{ n'ont pas la même image.}}$

Exercice 8 (2,5 points)
Déterminer la mesure principale d'un angle dont une mesure est de $\dfrac{67\pi}{6}$ radians. Justifier.
$2\pi=\dfrac{12\pi}{6}$.
On cherche le multiple de 12 le plus proche de 67, c'est $72=6\times12$.
$\dfrac{67\pi}{6}=\dfrac{72\pi}{6}-\dfrac{5\pi}{6}=6\times2\pi-\dfrac{5\pi}{6}.$
$\boxed{\text{La mesure principale est } -\dfrac{5\pi}{6}\in]-\pi;\pi].}$