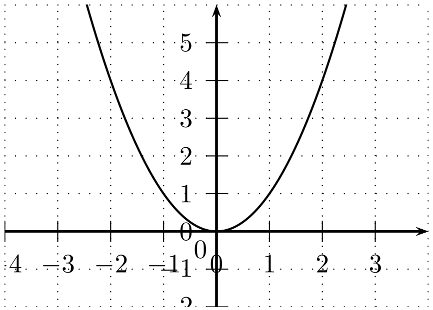
Seconde 2. Interrogation de mathématiques n° 11
Correction du Sujet 1

Exercice 1 (cours : 4 points)

1. Tracer ci-dessous la représentation graphique de la fonction carré.



2. Donner le tableau de variation de la fonction inverse.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$\searrow$	‖	$\searrow$

3. Compléter.
   (a) Pour sous événements A et B,
   $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ $\qquad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
   (b) Il y a équiprobabilité lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Exercice 2 (4 points)

1. Soit le réel $a = 2 - \frac{2}{3}$. Mettre a, puis a^2 et $\frac{1}{a}$ sous forme de fraction irréductible.
   $a = 2 - \frac{2}{3} = \frac{6-2}{3} = \frac{4}{3}$.
   Donc $a^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$, et $\frac{1}{a} = \frac{3}{4}$.
2. Résoudre les équations suivantes (aucune justification n'est demandée) :
   (a) $x^2 + 4 = 0$
   Un carré est toujours positif, donc l'équation n'a pas de solution
   (b) $\frac{1}{x} = -3$
   $x = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$. $\qquad \boxed{S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}}$

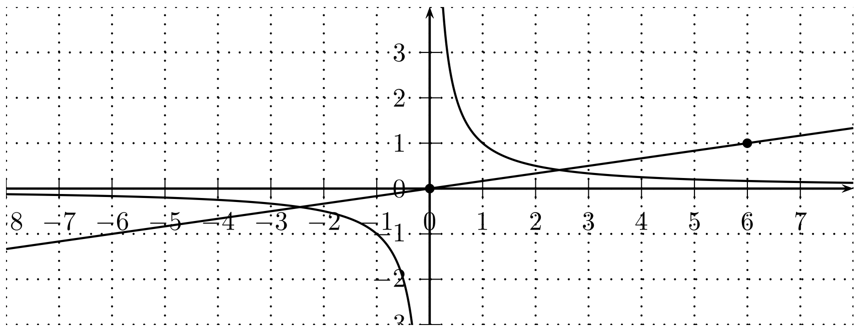
3. Soit un réel x tel que $-3 \leqslant x \leqslant 2$.
   Donner le meilleur encadrement de x^2. Justifier la réponse.
   La fonction carré n'est pas monotone sur $[-3; 2]$.

x	-3		0		2
x^2	9	$\searrow$	0	$\nearrow$	4

   Sur cet intervalle, son minimum est 0 et son maximum est 9.
   $\boxed{0 \leqslant x^2 \leqslant 9}$

Exercice 3 (4 points)

Soit f la fonction inverse, définie pour tout réel x non nul par $f(x) = \frac{1}{x}$.
La courbe de f est tracée ci-dessous.
On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{6}x$.



1. Tracer la courbe de la fonction g sur le même graphique. Justifier.
   g est une fonction affine (et même linéaire). La courbe est donc une droite (et passant par l'origine si l'on remarque le fait que la fonction est linéaire.
   Il suffit de placer 2 points.
   $g(0) = 0$, et $g(6) = \frac{6}{6} = 1$.
   Donc la droite passe par $O(0; 0)$ et $A(6; 1)$.
2. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$. Expliquer la méthode.
   Les solution sont les abscisses des points d'intersection des courbes de f et de g.
   En lisant des valeurs approchées, les solutions sont environ -2,5 et 2,5.

3. (a) Soit x un réel non nul. Montrer que $f(x) = g(x)$ équivaut à $x^2 = 6$.
   Soit x un rél non nul, $\dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{6}$ ssi $x \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{x \times x}{6}$ ssi $1 = \dfrac{x^2}{6}$ ssi $x^2 = 6$.
   $\boxed{\text{L'équation } f(x) = g(x) \text{ équivaut à } x^2 = 6.}$

   (b) En déduire la résolution de l'équation $f(x) = g(x)$ par le calcul.
   $f(x) = g(x)$ ssi $x^2 = 6$ ssi $(x = -\sqrt{6}$ ou $x = \sqrt{6})$.
   Note : $\sqrt{6} \approx 2,45$, c'st cohrent avec la résolution graphique).

4. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > g(x)$. Justifier.
   Les solutions sont les abscisses des points où $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de $\mathscr{C}_g$.
   $\boxed{S =]-\infty; -\sqrt{6}[\cup]0; \sqrt{6}[}$

Exercice 4 (6 points)

Dans une production de 100 000 pièces d'usine, on tire au hasard une pièce et on contrôle sa qualité. À l'issue du contrôle, la pièce est soit acceptée, soit refusée, mais il arrive que le contrôle fasse des erreurs de diagnostic.
5% des pièces sont non valables (défectueuses).
2% des pièces valables sont refusées, et 20 % des pièces non valables sont refusées.

1. Compléter le tableau d'effectifs suivant. Aucune justification n'est demandée.

	Acceptée	Refusée	Total
Valable	93 100	1 900	95 000
Non valable	4 000	1 000	5 000
Total	97 100	2 900	100 000

2. On définit les événements :
   — V : "La pièce est valable"
   — A : "la pièce est acceptée"

   (a) Déterminer $P(V)$ et $P(A)$. Justifier.
   Il y a équiprobabilité.
   $P(V) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas total}}$.
   $\boxed{\text{Donc } P(V) = \dfrac{95\,000}{100\,000} = 0,95.}$
   $\boxed{\text{De même, } P(A) = \dfrac{97\,100}{100\,000} = 0,971.}$

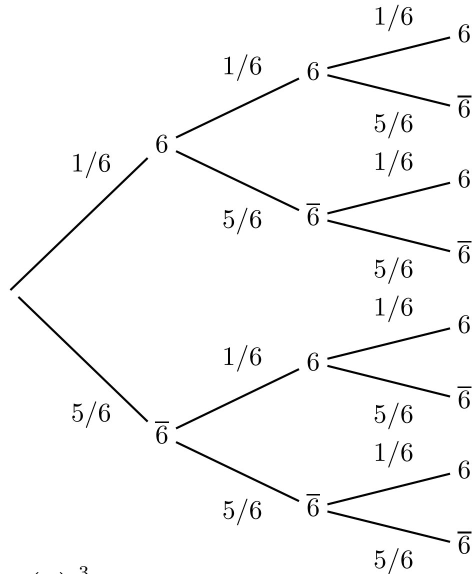
   (b) Traduire par une phrase $A \cap V$ et calculer sa probabilité.
   $A \cap V$: "La pièce est valable et est acceptée".
   $\boxed{P(A \cap V) = \dfrac{93\,100}{10\,000} = 0,931.}$

   (c) Traduire par une phrase $A \cup V$ et calculer sa probabilité.
   $A \cup V$: "La pièce est valable ou est acceptée".
   $P(A \cup V) = P(A) + P(V) - P(A \cap V)$.
   $\boxed{P(A \cup V) = 0,971 + 0,95 - 0,931 = 0,99.}$

   (d) Il y a une erreur de diagnostic si l'on accepte une pièce non valable ou si l'on refuse une pièce valable. Déterminer la probabilité de l'événement E : "il y a une erreur de diagnostic".
   $E = (A \cap \overline{V}) \cup (\overline{A} \cap V)$.
   Or, $A \cap \overline{V}$ et $\overline{A} \cap V$ sont incompatibles.
   Donc $P(E) = P(A \cap \overline{V}) + P(\overline{A} \cap V)$
   $P(E) = \dfrac{4\,000}{100\,000} + \dfrac{1\,900}{100\,000} = \dfrac{5\,900}{100\,000} = 0,059$.
   $\boxed{\text{La probabilité qu'il y ait une erreur de diagnostic est de 0,059.}}$

Exercice 5 (2 points)

On lance un dé cubique équilibré trois fois de suite.
Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois le résultat 6 ? Justifier.
Notons A : "on obtient au moins un 6".
Alors $\overline{A}$: "on n'obtient aucun 6"



$P(\overline{A} = P(\overline{6}; \overline{6}; \overline{6}) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^3 = \dfrac{125}{216}$.
Donc $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{125}{216} = \dfrac{91}{216}$.

$\boxed{\text{La probabilité d'obtenir au moins un 6 sur 3 lancers est de } \dfrac{91}{216} \text{ soit environ 0,42.}}$