1G - groupes 8 et 9 - Spécialité mathématiques
Correction du travail à distance n°6 pour le lundi 11 mai 2020

Exercice 1 (52 page 176)
Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\mathrm{e}^{1+2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{1+x}}{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}}$.
Comme une exponentielle est toujours strictement positive, on a,
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+\mathrm{e}^{2x} > 0$ et $\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x} > 0$.
L'égalité étudiée est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.
D'une part, $\mathrm{e}^{1+2x} \times (\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}) = \mathrm{e}^{1+2x-x} + \mathrm{e}^{1+2x+x} = \mathrm{e}^{1+x} + \mathrm{e}^{1+3x}$.
D'autre part, $(1+\mathrm{e}^{2x}) \times \mathrm{e}^{1+x} = \mathrm{e}^{1+x} + \mathrm{e}^{1+x+2x} = \mathrm{e}^{1+x} + \mathrm{e}^{1+3x}$.
Comme les produits en croix sont égaux, les fractions sont égales.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\mathrm{e}^{1+2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{1+x}}{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}}$.

Exercice 2 (65 page 176)

1. Signe de $A(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+1}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{x} > 0$ et $\mathrm{e}^{x}+1 > 0$, donc $A(x)$ a le même signe que x.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$A(x)$		$-$	0	$+$	

2. Signe de $B(x) = x\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{x+1}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $B(x) = x\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{1} = \mathrm{e}^{x}(x-\mathrm{e})$.
   Comme $\mathrm{e}^{x} > 0$ sur $\mathbb{R}$, $B(x)$ a le même signe que $x - \mathrm{e}$ (fonction affine, $a = 1 > 0$).

x	$-\infty$		e		$+\infty$
$B(x)$		$-$	0	$+$	

Exercice 3 (73 page 177)

1. Montrons que $\mathrm{e}^{x} - 2\mathrm{e}^{-x} + 1 = 0$ équivaut à $(\mathrm{e}^{x})^2 + \mathrm{e}^{x} - 2 = 0$.
   Comme $\mathrm{e}^{x} > 0$ sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{x} - 2\mathrm{e}^{-x} + 1 = 0$ équivaut à $(\mathrm{e}^{x} - 2\mathrm{e}^{-x} + 1)\mathrm{e}^{x} = 0$, soit $\mathrm{e}^{2}x - 2\mathrm{e}^{0} + \mathrm{e}^{x} = 0$, c'est-à-dire $(\mathrm{e}^{x})^2 + \mathrm{e}^{x} - 2 = 0$.
2. Résolution de $\mathrm{e}^{x} - 2\mathrm{e}^{-x} + 1 = 0$.
   On résout l'équation $(\mathrm{e}^{x})^2 + \mathrm{e}^{x} - 2 = 0$ qui lui est équivalente.
   On pose $X = \mathrm{e}^{x}$, l'équation devient du second degré, $X^2 + X - 2 = 0$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 8 = 9 > 0$.
   $X_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-3}{2} = -2$.
   $X_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+3}{2} = 1$.
   Comme on a posé $X = \mathrm{e}^{x}$, il vient
   $\mathrm{e}^{x} = -2$ ou $\mathrm{e}^{x} = 1$.
   L'équation $\mathrm{e}^{x} = -2$ n'a pas de solution réelle car $\mathrm{e}^{x} > 0$ sur $\mathbb{R}$.
   L'équation $\mathrm{e}^{x} = 1$ équivaut à $\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{0}$, et donc à $x = 0$.
   L'équation $\mathrm{e}^{x} - 2\mathrm{e}^{-x} + 1 = 0$ a une seule solution qui est 0.

Exercice 4 (74 page 177)

1. $1 \leqslant \mathrm{e}^{3x}$ ssi $\mathrm{e}^{3x} \geqslant \mathrm{e}^0$ ssi $3x \geqslant 0$ ssi $x \geqslant 0$.
   $S = [0; +\infty[$.
2. $\mathrm{e}^{-x^2} - \mathrm{e} \times \mathrm{e}^{7x-9} \leqslant 0$
   ssi $\mathrm{e}^{-x^2} - \mathrm{e}^{7x-9+1} \leqslant 0$
   ssi $\mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \mathrm{e}^{7x-8} \leqslant 0$
   ssi $-x^2 \leqslant 7x - 8$.
   ssi $x^2 + 7x - 8 \geqslant 0$, inéquation du second degré.
   Comme 1 est racine évidente de l'équation, on trouve la seconde racine avec la propriété qui dit que le produit des racines fait $\dfrac{c}{a}$ (on peut aussi bien sûr calculer Δ etc.)
   Les racines sont donc 1 et -8, et le trinôme est positif, (signe de a, ici $a = 1 > 0$) à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		-8		1		$+\infty$
$x^2 + 7x - 8$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   $S =]-\infty; -8] \cup [1; +\infty[$.

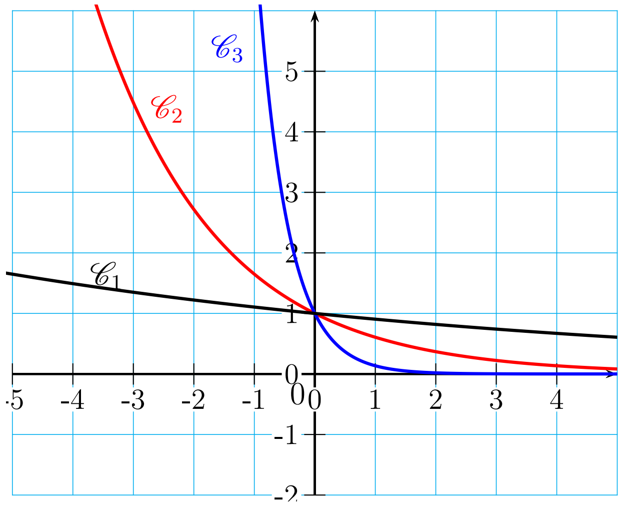
Exercice 5 (83 page 178)

Soient k et m des réels tels que $0 < k < m$.

1. Étudier le signe de $\mathrm{e}^{-kx} - \mathrm{e}^{-mx}$.
   $\mathrm{e}^{-kx} - \mathrm{e}^{-mx} > 0$ ssi $\mathrm{e}^{-kx} > \mathrm{e}^{-mx}$ ssi $-kx > -mx$ ssi $(m-k)x > 0$.
   Or, on suppose que $0 < k < m$, et donc on a $m - k > 0$.
   Ainsi, $(m-k)x > 0$ ssi $x > 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{e}^{-kx} - \mathrm{e}^{-mx}$		$-$	0	$+$	0

2. $f(x) = \mathrm{e}^{-0,5x}$, $g(x) = \mathrm{e}^{-0,1x}$ et $h(x) = \mathrm{e}^{-2x}$.
   La question 1 montre que si $0 < k < m$, alors la courbe de $x \mapsto \mathrm{e}^{-kx}$ est au-dessus de celle de $x \mapsto \mathrm{e}^{-mx}$ sur $]0; +\infty[$, et en-dessous sur $]-\infty; 0[$.
   Ainsi, puisque $0 < 0,1 < 0,5 < 2$, à l'aide de ce résultat, on a sur $[0; +\infty[$, $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$.
   Donc la courbe de f est $\mathscr{C}_2$, celle de g est $\mathscr{C}_1$ et celle de h est $\mathscr{C}_3$.



Exercice 6 (93 page 178)
Sur $[2;10]$, on donne $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2-3}$.

1. Calculons $f'(x)$ et montrons que $f'(x)$ est du signe de x^2-2x-3.
   Tout d'abrd, $x^2-3=0$ ssi $x=\sqrt{3}$ ou $-\sqrt{3}$.
   Aucun de ces nombres n'appartient à l'intervalle $[2;10]$, donc x^2-3 ne s'annule pas sur cet intervalle.
   Par quotient de fonctions dérivavles, f est dérivable sur $[2;10]$. On rappelle la dérivée d'un quotient : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.
   Pour tout $x \in [2;10]$, $f'(x) = \dfrac{e^x(x^2-3)-e^x\times 2x}{(x^2-3)^2} = \dfrac{e^x(x^2-2x-3)}{(x^2-3)^2}$.
   Or, $e^x>0$ sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x\in[2;10]$, $(x^2-3)^2>0$.
   Donc $f'(x)$ a le même signe que x^2-2x-3.
2. Tableau de variation de f.
   On étudie le signe de $f'(x)$, ce qui revient au signe du trinôme x^2-2x-3.
   $\Delta = b^2-4ac = 4+12 = 16 > 0$.
   $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2-4}{2} = -1$.
   $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2+4}{2} = 3$.
   Le trinôme prend le signe de a (ici $a=1>0$) à l'extérieur des racines, et comme on se limite à l'intervalle d'étude [2 ;10], on obtient le tableau suivant :

x	2		3		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	e^2	$\searrow$	$\dfrac{e^3}{6}$	$\nearrow$	$\dfrac{e^{10}}{97}$

$f(2) = \dfrac{e^2}{2^2-3} = e^2 \approx 7,4$.
$f(3) = \dfrac{e^3}{6} \approx 3,3$.
$f(10) = \dfrac{e^{10}}{97} \approx 227,1$.

Exercice 7 (104 page 179)
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $u_n = e^{n+1}$.
Montrons que la suite (u_n) est géométrique, et précisons la raison.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = e^{n+1+1} = e^{n+1}\times e = e\times u_n$.
Donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q=e\approx 2,718$.
Remarque :
Comme le premier terme est positif et $q>1$, la suite (u_n) est strictement croissante.

Exercice 8 (105 p 179)
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $u_n = \dfrac{e^{5n}}{5}$.
Montrons que la suite (u_n) est géométrique, et précisons la raison.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{e^{5(n+1)}}{5} = \dfrac{e^{5n+5}}{5} = \dfrac{e^{5n}\times e^5}{5} = e^5\times\dfrac{e^{5n}}{5} = e^5\times u_n$.
Donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q=e^5\approx 148,4$.