1STI3 - Mathématiques spécialité
Correction du travail à distance n°2 pour le lundi 30 mars 2020.

Exercice 1 (ex 7 partie cours)
Soit f la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1. Déterminer l'approximation affine de $f(1+h)$ pour h proche de 0.
   D'après le cours, pour f dérivable en a, et pour h voisin de 0, on a $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$.
   Ici, $a = 1$, donc $f(1+h) \approx f(1) + h \times f'(1)$.
   $f(1) = 1^2 = 1$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$, donc $f'(1) = 2$.
   Ainsi, pour h proche de 0, on a $f(1+h) \approx 1 + 2h$
2. En déduire sans calculatrice une valeur approchée de $1,01^2$, $1,003^2$, puis $0,99^2$.
   $1,01^2 = f(1+0,01)$, donc, avec $h = 0,01$, il vient $1,01^2 \approx 1 + 2 \times 0,01$, soit $1,01^2 \approx 1,02$.
   $1,003^2 \approx 1 + 2 \times 0,003$, donc $1,003^2 \approx 1,006$.
   Et pour $0,99^2 = f(1-0,01)$, on prend $h = -0,01$, et $0,99^2 \approx 1+2 \times (-0,01)$, d'où $0,99^2 \approx 0,98$.

Exercice 2 (ex10 page 239)
$f(t) = 3\cos(-2t+\pi)$, $f'(t) = 3 \times -2 \times (-\sin(-2t+\pi)) = 6\sin(-2t+\pi)$
$g(t) = 2\sin(3t + \frac{\pi}{2})$, $g'(t) = 2 \times 3 \times \cos(3t + \frac{\pi}{2}) = 6\cos(3t + \frac{\pi}{2})$.

Exercice 3 (ex 12 page 239)
$f(x) = x^3$.

1. $f'(x) = 3x^2$.
2. Approximation affine de $f(1+h)$.
   D'après le cours, pour f dérivable en a, et pour h voisin de 0, on a $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$.
   Ici, $a = 1$, donc $f(1+h) \approx f(1) + h \times f'(1)$.
   $f(1) = 1^3 = 1$. Et $f'(1) = 3 \times 1^2 = 3$.
   Pour h proche de 0, on a donc $f(1+h) \approx 1 + 3h$.
3. $f(1,01) = f(1+0,01)$. On remplace h par 0,01.
   $f(1,01) \approx 1 + 3 \times 0,01$, donc $1,01^3 \approx 1,03$.
   $f(0,99) = f(1-0,01)$. On remplace h par $-0,01$.
   $f(0,99) \approx 1 + 3 \times (-0,01)$, donc $0,99^3 \approx 0,97$.

Exercice 4 (ex 48 page 241)

1. $f(x) = \dfrac{3-4x}{2+5x}$ sur $I = \left]-\dfrac{2}{5};+\infty\right[$.
   $$f'(x) = \frac{-4(2+5x) - (3-4x) \times 5}{(2+5x)^2} = \frac{-8-20x-15+20x}{(2+5x)^2} = \frac{-23}{(2+5x)^2} < 0.$$
   Comme un carré est toujours positif, on a pour tout $x > -\dfrac{2}{5}$, $f'(x) < 0$.
   Donc f est strictement décroissante sur $I = \left]-\dfrac{2}{5};+\infty\right[$.

x	$-2/5$ $+\infty$
$f'(x)$	$\|$ $-$
$f(x)$	$\|$ $\searrow$

2. $f(x) = 4 + \dfrac{1}{x}$ sir $I =]0;+\infty[$.
   Pour tout $x > 0$, $f'(x) = 0 - \dfrac{1}{x^2} = -\dfrac{1}{x^2} < 0$.
   Donc f est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

x	0 $+\infty$
$f'(x)$	$\|$ $-$
$f(x)$	$\|$ $\searrow$

Exercice 5 (ex 52 page 241)
$f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + 3$.

1. Comme toute fonction polynôme, f est dérivable sr $\mathbb{R}$.
   $f'(x) = 4x^3 + \frac{4}{3} \times 3x^2 - 4 \times 2x + 0 = 4x^3 + 4x^2 - 8x$.
   Par ailleurs, en développant,
   $4x(x-1)(x+2) = 4x(x^2 + x - 2) = 4x^3 + 4x^2 - 8x$.
   Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 4x(x-1)(x+2)$.
2. Signe de $f'(x)$.
   Pour étudier le signe, on part de la forme factorisée $f'(x) = x(x-1)(x+2)$.
   Valeurs clés :
   $4x = 0$ ssi $x = 0$
   $x - 1 = 0$ ssi $x = 1$.
   Et $x + 2 = 0$ ssi $x = -2$.

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$4x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

3. Tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
   On trouve les images à la calculatrice, $f(-2) = -\frac{23}{3}$, $f(0) = 3$, et $f(1) = \frac{4}{3}$.

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-23/3$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$4/3$	$\nearrow$	

Exercice 6 (53 page 241)
Sur l'intervalle $]1; +\infty[$, on pose $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$.

1. Montrons que $f'(x) = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$.
   $f'(x) = \frac{3x^2(x-1)^2 - x^3 \times (2x-2)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)[3x^2(x-1) - 2x^3]}{(x-1)(x-1)^3} = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$.
2. Signe de $f'(x)$ et tableau de variation.
   Sur $]1; +\infty[$, $(x-1) > 0$, donc $(x-1)^3 > 0$.
   De plus, sur $]1; +\infty[$, $x^2 > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe de $(x-3)$.
   $x - 3 = 0$ ssi $x = 3$.

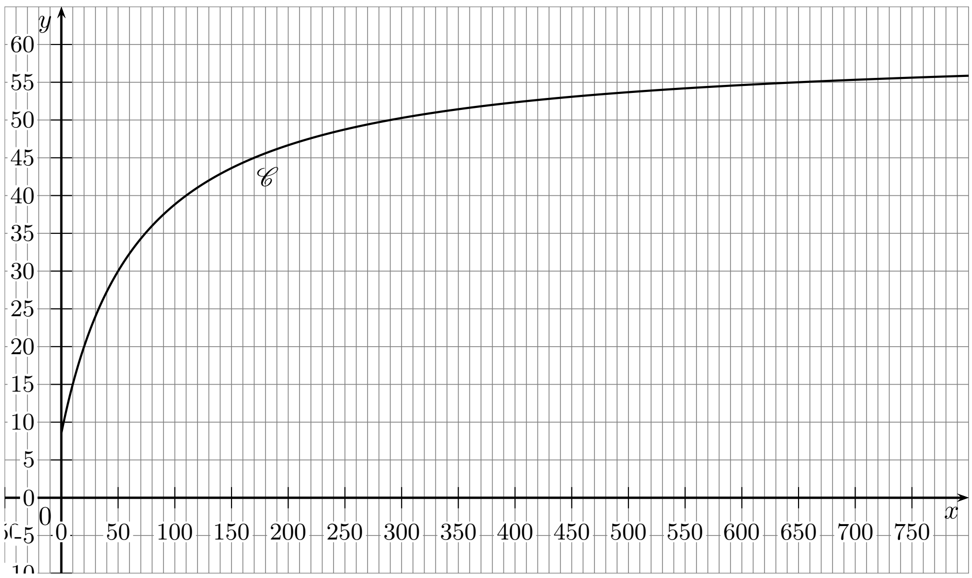
x	1		3		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$	$\searrow$	$27/4$	$\nearrow$	

Exercice 7 (ex facutatif : ex 79 page 245)
La résistance d'un montage éléctrique vérifie : $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{60} + \dfrac{1}{10+x}$.

1. Montrons que $R = \dfrac{60x+600}{x+70}$.
   On met au même dénominateur dans la relation de départ, à droite du signe égal.
   $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{60} + \dfrac{1}{10+x} = \dfrac{1\times(10+x)+60\times 1}{60(10+x)} = \dfrac{x+70}{60x+600}$.
   Donc $R = \dfrac{60x+600}{x+70}$.
2. On pose $f(x) = \dfrac{60x+600}{x+70}$ sur $[0;+\infty[$.
   Dérivée et variations de f.
   $f'(x) = \dfrac{60(x+70)-(60x+600)\times 1}{(x+70)^2} = \dfrac{3600}{(x+70)^2} > 0$.
   Donc f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
   $f(0) = \dfrac{60\times 0+600}{0+70} = \dfrac{600}{70} = \dfrac{60}{7}$.

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$60/7$ $\nearrow$

3. Représentation graphique



4. Montrons que pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 8$.
   Comme f est croissante sur $[0;+\infty[$, le minimum de f est $f(0) = \dfrac{60}{7} \approx 8,6$.
   On observe que $f(0) \geqslant 8$.
   Donc pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 8$.
5. Calculer $f(x) - 60$, puis montrer que pour tout $x \in I$, $f(x) < 60$.
   $f(x) - 60 = \dfrac{60x+600}{x+70} - \dfrac{60(x+70)}{x+70} = \dfrac{60x+600-60x-4200}{x+70} = \dfrac{-3600}{x+70} < 0$
   car $x+70 > 0$ sur $[0;+\infty[$.
   Donc pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) - 60 < 0$, soit $f(x) < 60$.
   On dit que la fonction f est bornée : pour tout $x \in [0;+\infty[$, $\dfrac{60}{7} \leqslant f(x) < 60$.