Correction du Dm6

Exercice 1 (ex3 fiche fonction carré)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 - 2x + 2$. La fonction f est représentée ci-dessous

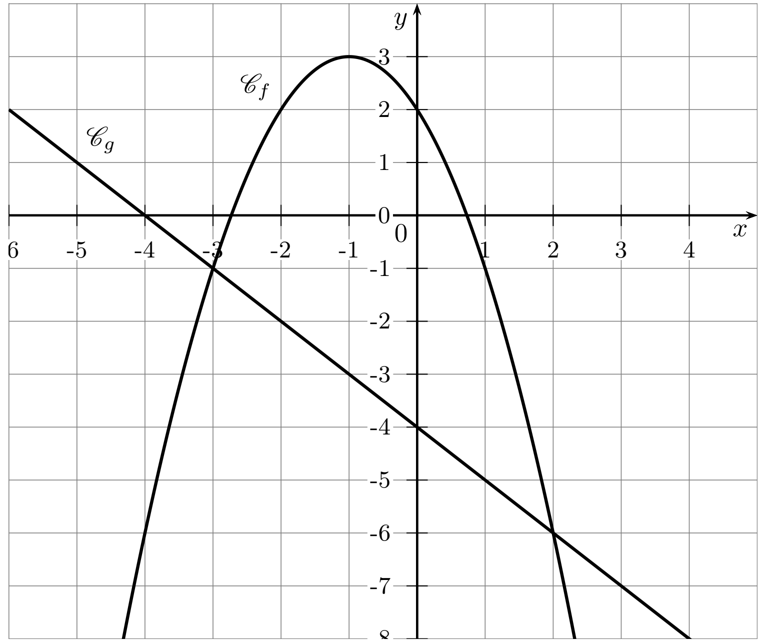
1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -(x+1)^2 + 3$.
   En développant, $-(x+1)^2 + 3 = -(x^2+2x+1)+3 = -x^2 - 2x + 2 = f(x)$.
   $\boxed{\text{Donc pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) = -(x+1)^2 + 3.}$
2. En déduire la résolution de l'équation $f(x) = 0$ par le calcul.
   $f(x) = 0$, $3 - (x+1)^2 = 0$, soit $\sqrt{3}^2 - (x+1)^2 = 0$.
   En factorisant à l'aide de l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, il vient :
   $(\sqrt{3} + x + 1)(\sqrt{3} - x - 1) = 0$.
   D'où $x + 1 + \sqrt{3} = 0$ ou bien $-x - 1 + \sqrt{3} = 0$.
   $x = -1 - \sqrt{3}$ ou $x = -1 + \sqrt{3}$.
   $\boxed{\text{Les solutions de l'équation } f(x) = 0 \text{ sont } -1-\sqrt{3} \text{ et } -1+\sqrt{3}.}$
3. Soit g la fonction affine définie par $g(x) = -x - 4$.
   (a) Tracer dans le même repère la courbe de g.
   g est une fonction affine, elle est représentée par une droite.

x	0	-3
$g(x)$	-4	-1

   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - g(x) = (x+3)(2-x)$.
   $f(x) - g(x) = -x^2 - 2x + 2 - (-x-4) = -x^2 - 2x + 2 + x + 4 = -x^2 - x + 3$.
   Par ailleurs, el développant,
   $(x+3)(2-x) = 2x - x^2 + 6 - 3x = -x^2 - x + 6 = f(x) - g(x)$.
   $\boxed{\text{Donc } f(x) - g(x) = (x+3)(2-x).}$
   (c) En déduire le tableau de signe de $f(x) - g(x)$, puis la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$. On vérifiera la cohérence de ce résultat avec la graphique.
   Valeurs clés : $x + 3 = 0$ ssi $x = -3$, et $x - 2 = 0$ ssi $x = 2$.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)-g(x) = (x+3)(2-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   Ainsi, $f(x) - g(x) < 0$ sur $]-\infty; -3[\cup]2; +\infty[$, et $f(x) - g(x) > 0$ sur $]-3; 2[$.
   $\boxed{\text{On en déduit que } \mathscr{C}_f \text{ est en-dessous de } \mathscr{C}_g \text{ sur }]-\infty;-3[\cup]2;+\infty[\text{ et que } \mathscr{C}_f \text{ est au-dessus de } \mathscr{C}_g \text{ sur }]-3;2[.}$



Exercice 2 (n° 42 page 120)

x désigne la mesure du côté de la carte carrée.
Notons $f(x)$ l'empagement (la surface imprimable)

1. La partie imprimable de la carte est un rectangle de dimensions $x - 1 - 1 = x - 2$ et $x - 2 - 2 = x - 4$.
   $\boxed{\text{Donc } f(x) = (x-2)(x-4).}$
2. Montrer que $f(x) = (x-3)^2 - 1$.
   En développant, $f(x) = (x-2)(x-4) = x^2 - 6x + 8$.
   Par ailleurs, en développant, $(x-3)^2 - 1 = x^2 - 6x + 9 - 1 = x^2 - 6x + 8$.
   $\boxed{\text{Donc } f(x) = (x-3)^2 - 1.}$
3. En déduire le côté puis l'aire de la carte pour que l'empagement soit de 168 cm^2.
   On rout l'équation $f(x) = 168$.
   $(x-3)^2 - 1 - 168 = 0$, $(x-3)^2 - 13^2 = 0$.
   Donc $(x - 3 - 13)(x - 3 + 13) = 0$, soit $(x-16)(x+10) = 0$.
   $x - 16 = 0$ ou $x + 10 = 0$.
   $x = 16$ ou $x = -10$.
   Comme x est une longueur, on retient seulement la solution positive $sx = 16$.
   La côté de la carte doit mesurer 16 cm pour que la partie imprimable ait une surface de 168 cm^2.
   $16^2 = 256$. Alors, la surfa de la carte est de 256 cm^2.

Exercice 3 (106 p 126)

Partie A.

1. Je laisse le dessin de T_5, on trouve $T_5 = 1+2+3+4+5 = 15$.
2. $T_6 = 1+2+3+4+5+6 = 21$, et $T_7 = 1+2+3+4+5+6+7 = 28$.
3. $T_{51} = 1+2+3+\cdots+50+51 = T_{50}+51$.
4. Algorithme pour calculer T_{100}.

   T `prend la valeur 0`

   `Pour` k `allant de 1 à 100`

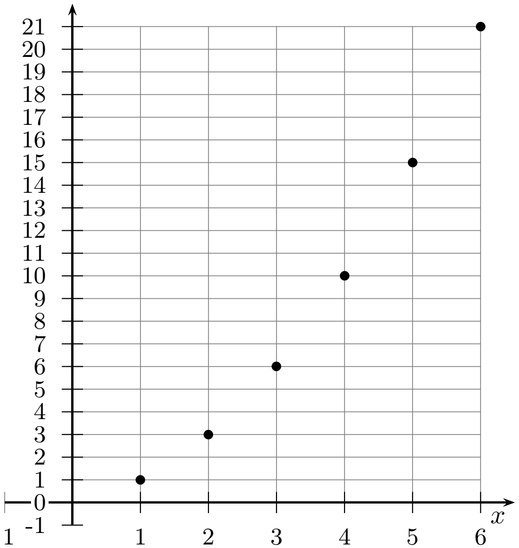
   $\quad$ T `prend la valeur` $T+k$

   `Fin Pour`

   `Afficher` T $\quad T_{100} = 5050$.

Partie B

1. Représentation des points $(n;T_n)$, pour $1 \leqslant n \leqslant 6$.



   Ils semblent appartenir à une courbe du même type que celle de la fonction carré (une parabole).

2. Le rectangle a pour dimensions n et $(n+1)$.
   Il est formé de $n \times (n+1)$ petits carrés.
3. $2T_n = n(n+1)$, donc $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
4. Contrôle des questions précédentes : on teste si la relation $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ est vraie pour les premiers entiers.
   Par exemple, $T_5 = 15$, et $\dfrac{5\times(5+1)}{2} = 15$.
   La relation est bien vraie pour $n = 5$.

Exercice 4 (114 page 127)

Soit n un nombre entier.

$$\begin{aligned}
\frac{(8^{n+1}+8^n)^2}{(4^n-4^{n-1})^3} &= \frac{[8^n(8+1)]^2}{[4^{n-1}(4-1)]^3} \\
&= \frac{9^2\times 8^{2n}}{3^3\times 4^{3(n-1)}} \\
&= \frac{(3^2)^2\times (2^3)^{2n}}{27\times (2^2)^{3n-3}} \\
&= \frac{3^4\times 2^{6n}}{3^3\times 2^{6n-6}} \\
&= \frac{3^{4-3}\times 2^{6n}}{2^{6n}\times 2^{-6}} \\
&= 3\times 2^6 \\
&= 192
\end{aligned}$$

Quel que soit l'entier n, le résultat est 192.