Interrogation de mathématiques n° 4
Sujet 1

Exercice 1 (12 points)

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - xe^x + 1$.

1. Déterminer la limite de g en $-\infty$.
2. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
3. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$ et donner son tableau de variation.
4. (a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$. On note α cette solution.
   (b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
5. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
6. Démontrer que $e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

Partie 2

Soit A la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $A(x) = \dfrac{4x}{e^x + 1}$.

1. Démontrer que, pour tout x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$ où g est la fonction étudiée dans la partie 1.
2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0; +\infty[$.

Exercice 2 (5 points)

Les questions sont indépendantes.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-3x}$.
   (a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. Justifier.
   (b) Calculer $f'(x)$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x+1}}{x}$.
3. Montrer que pour tout réel $x \neq 0$,
$$\frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}.$$

Exercice 3 (3 points)

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 5x + 1$.
   (a) Donner une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire la primitive de f qui vaut 1 en -2.
2. Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions suivantes. Aucune justification n'est attendue.
   (a) $a(x) = \dfrac{6x}{\sqrt{3x^2 + 1}}$.
   (b) $b(x) = x(4x^2 - 3)^6$.

T8 20/01/2018

Interrogation de mathématiques n° 4

Sujet 2

Exercice 4 (12 points)

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + 1$.

1. Déterminer la limite de g en $-\infty$.
2. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
3. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$ et donner son tableau de variation.
4. (a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$. On note α cette solution.
   (b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
5. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
6. Démontrer que $\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.

Partie 2

Soit A la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $A(x) = \dfrac{4x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

1. Démontrer que, pour tout x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$ où g est la fonction étudiée dans la partie 1.
2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0; +\infty[$.

Exercice 5 (5 points)

Les questions sont indépendantes.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \mathrm{e}^{3x-1}.$$
   (a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. Justifier.
   (b) Calculer $f'(x)$.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x-3}$.
3. Montrer que pour tout réel $x \neq 0$,
$$\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} - \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} = \frac{2}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}.$$

Exercice 6 (3 points)

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^3 - x + 11$.
   (a) Donner une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire la primitive de f qui vaut 1 en -2.
2. Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions suivantes. Aucune justification n'est attendue.
   (a) $a(x) = \dfrac{x}{\sqrt{6x^2 + 5}}$.
   (b) $b(x) = 2x(x^2 - 1)^3$.