

CRSA1. Interrogation n° 3. Correction

Exercice 1 (3 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

- $3(x - 15)(x + 2) = 0$
 $x - 15 = 0$ ou $x + 2 = 0$.
 $x = 15$ ou $x = -2$.

Donc $S = \{15; -2\}$.

- $5x^2 - 9x + 4 = 0$.
 $\Delta = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4 \times 5 \times 4 = 81 - 80 = 1 > 0$.
 $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 - 1}{10} = 0,8$.

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 + 1}{10} = 1.$$

Donc $S = \{0, 8; 1\}$.

Exercice 2 (4 points)

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - x - 15$.

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-15) = 1 + 120 = 121 = 11^2 > 0.$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - 11}{4} = -2,5.$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + 11}{4} = 3.$$

Donc $S = \{-2,5; 3\}$.

- En déduire le tableau de signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$. Justifier (on pourra rappeler la propriété utilisée).

Lorsque $\Delta > 0$, le trinôme prend le signe de a à l'extérieur des racines. Ici, $a = 2 > 0$.

x	$-\infty$	$-2,5$	3	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

- Donner l'ensemble solution de l'inéquation $2x^2 - x - 15 \leq 0$.

$S = [2,5; 3]$.

Exercice 3 (1 point)

x	$-\infty$	2	6	$+\infty$		
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

Donner l'expression d'une fonction g compatible avec ce tableau de signe.

$g(x) = -7(x - 2)(x - 6)$ convient.

Forme factorisée $a(x - x_1)(x - x_2)$, avec 2 et 6 comme racines, et l'on choisit un $a < 0$.

Exercice 4 (3 points)

Compléter directement sur l'énoncé. Aucune justification n'est attendue.

- Soit $E = \text{bar}\{(A, 2); (B, 5)\}$. Alors $\overrightarrow{AE} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AB}$.

- Si $\overrightarrow{AG} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$, alors G est le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 4)$.

- I est le milieu de $[CD]$. Le point C est le barycentre de $(I, 2)$ et $(D, -1)$.

Exercice 5 (4 points)

Dans un repère de l'espace, on considère les points $A(1; 0; 3)$, $B(0; -2; 4)$ et $C(2; -2; 5)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}, \text{ soit } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ De même, } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Les points A , B et C sont-ils alignés ? Justifier.

Les coordonnées ne sont pas proportionnelles : $-2 \times 2 \neq -2 \times 1$.

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Donc les points A , B , C ne sont pas alignés.

3. Calculer les coordonnées du barycentre H du système de points $(A, 3)$, $(B, 2)$, $(C, 5)$.

H existe car $3 + 2 + 5 = 10 \neq 0$.

$$x_H = \frac{3x_A + 2x_B + 5x_C}{2 + 3 + 5} = \frac{3 + 0 + 10}{10} = 1, 3.$$

$$y_H = \frac{3y_A + 2y_B + 5y_C}{2 + 3 + 5} = \frac{0 - 4 - 10}{10} = -1, 4.$$

$$z_H = \frac{3z_A + 2z_B + 5z_C}{2 + 3 + 5} = \frac{9 + 8 + 25}{10} = 4, 2.$$

Ainsi, $H(1, 3; -1, 4; 4, 2)$.

Exercice 6 (6 points)

On considère 3 points A , B et C de l'espace.

1. On note K le barycentre $(A, 1)$ et $(B, 3)$.

Exprimer $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

K existe car $1 + 3 = 4 \neq 0$.

$$\overrightarrow{AK} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB} = \frac{3}{1+3} \overrightarrow{AB} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AB}.$$

2. On note H le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 3)$ et $(C, 4)$.

Justifier que H est le milieu de $[CK]$.

Par associativité du barycentre,

$$H = \text{bar}\{(A, 1); (B, 3); (C, 4)\} = \text{bar}\{(K, 4); (C, 4)\}.$$

Donc H est l'isobarycentre de K et C , c'est le milieu du segment $[KC]$.

3. Construire les points K et H en laissant des traits de construction.

4. Construire le point E barycentre de $(A, 2)$, $(B, 2)$ et $(C, -3)$.

On introduit le point $I = \text{bar}\{(A, 2); (B, 2)\}$.

I existe car $2 + 2 = 4 \neq 0$. Et I est le milieu de $[AB]$ (isobarycentre de A et B).

Par associativité, $E = \text{bar}\{(I, 4); (C, -3)\}$.

Donc $\overrightarrow{IE} = \frac{-3}{-3+4} \overrightarrow{IC} = -3\overrightarrow{IC}$. Cela permet de construire le point E .

