**BTS CRSA2.Correction de l'interrogation n° 1**

**Exercice 1 (2 points)**

1. Résoudre l'équation différentielle homogène suivante :
$$y' - 3y = 0$$
$a(x) = -3$, une primitive est $A(x) = -3x$.
Les solutions sont les fonctions $f$ définies par $f(x) = k\mathrm{e}^{3x}$, $k \in \mathbb{R}$.
2. En déduire la solution telle que $f(1) = -1$.
$f(1) = -1$ ssi $k \times \mathrm{e}^{3\times 1} = -1$ ssi $k = -\dfrac{1}{\mathrm{e}^3} = -\mathrm{e}^{-3}$.
La solution vérifiant $(1) = -1$ est la fonction $f$ définie par $f(x) = -\mathrm{e}^{-3}\mathrm{e}^{3x} = -\mathrm{e}^{3x-3}$.

**Exercice 2 (4 points)**

On se propose de résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E)$ :
$$y' + y = x\mathrm{e}^{-4x}.$$

1. Résoudre l'équation homogène $(H)$ : $y' + y = 0$.
$a(x) = 1$, donc une primitive est $A(x) = x$.
Les solutions sont les fonctions $f$ définies par $f(x) = k\mathrm{e}^{-x}$, $k \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \left(-\dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{9}\right)\mathrm{e}^{-4x}$ est une solution de $(E)$.
$g'(x) = -\dfrac{1}{3} \times \mathrm{e}^{-4x} + \left(-\dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{9}\right) \times (-4)\mathrm{e}^{-4x}$
$g'(x) = \mathrm{e}^{-4x}\left(-\dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{3}x + \dfrac{4}{9}\right)$.
$g'(x) = \mathrm{e}^{-4x}\left(\dfrac{4}{3}x + \dfrac{1}{9}\right)$.
Ainsi, $g'(x) + g(x) = \mathrm{e}^{-4x}\left(\dfrac{4}{3}x + \dfrac{1}{9}\right) + \left(-\dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{9}\right)\mathrm{e}^{-4x}$
$g'(x) + g(x) = \mathrm{e}^{-4x} \times \left(\dfrac{3x}{3} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{9}\right)$
$g'(x) + g(x) = x\mathrm{e}^{-4x}$.
Donc $g$ est bine une solution particulière de $(E)$.
3. En déduire les solutions de $(E)$.
Les solutions de $(E)$ sont les fonctions $f$ de la forme $f(x) = \left(-\dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{9}\right)\mathrm{e}^{-4x} + k\mathrm{e}^{-x}$, avec $k \in \mathbb{R}$.
4. Déterminer la solution $f$ de $(E)$ vérifiant $f(0) = 3$.
$f(0) = 3$ ssi $-\dfrac{1}{9}\mathrm{e}^0 + k\mathrm{e}^0 = 3$ ssi $k = 3 + \dfrac{1}{9} = \dfrac{28}{9}$.
La solution de $(E)$ telle que $f(0) = 3$ est la fonction $f$ définie par $f(x) = \left(-\dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{9}\right)\mathrm{e}^{-4x} + \dfrac{28}{9}\mathrm{e}^{-x}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

**Exercice 3 (4 points)**

On chauffe un liquide dans une cuve. On note $g(t)$ sa température en degrés Celsius à l'instant $t \geqslant 0$, exprimé en secondes.
La fonction $g$ est solution de l'équation différentielle $(E)$ :
$$y' + 2 \times 10^{-4}y = 2 \times 10^{-2}.$$

1. Résoudre l'équation homogène associée.
On pose $(H)$ : $y' + 2 \times 10^{-4}y = 0$ ou $y' + 0,0002y = 0$.
Les solutions de $(H)$ sont les fonctions $f$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = k\mathrm{e}^{-0,0002t}$, $k \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer une fonction constante solution de l'équation complète $(E)$.
Posons $g(t) = c$.
Alors $g'(t) = 0$, et $g$ est solution de $(E)$ ssi
$g'(t) + 0,0002g(t) = 0,02$ ssi $0 + 0,0002 \times c = 0,02$ ssi $c = \dfrac{0,02}{0,0002} = 100$.
La fonction $g$ définie par $g(t) = 100$ est solution de $(E)$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de $(E)$.
Les solutions de $(E)$ sont les fonctions $f$ définies par $f(t) = k\mathrm{e}^{-0,0002t} + 100$, avec $k \in \mathbb{R}$.
4. Déterminer la fonction $g$ sachant qu'à l'instant initial la température du liquide était de 20 degrés.
$f(0) = 20$ ssi $k \times \mathrm{e}^0 + 100 = 20$ ssi $k = -80$.
Donc $f(t) = -80\mathrm{e}^{-0,0002t} + 100$.
5. Au bout de combien de temps la température atteint-elle 85 degrés ? Justifier.
$$\begin{array}{rcl} f(t) & = & 85 \\ -80\mathrm{e}^{-0,0002t} + 100 & = & 85 \\ -80\mathrm{e}^{-0,0002t} & = & -15 \\ \mathrm{e}^{-0,0002t} & = & \dfrac{15}{80} \\ \mathrm{e}^{-0,0002t} & = & 0,1875 \\ -0,0002t & = & \ln(0,1875) \\ t & = & \dfrac{\ln(0,1875)}{-0,0002} \\ t & \approx & 8370 \end{array}$$
8370s représentent 2h19m30s.
La température atteint 85 degrés au bout de 2h19m30s.