Correction du dm4

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $]3;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2}{x-3}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. La fonction $x\mapsto x-3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur l'intervalle $]3;+\infty[$.
   Par quotient, la fonction f est dérivable sur $]3;+\infty[$.
   $\boxed{\text{Pour tout } x>3,\ f'(x)=\dfrac{-2}{(x-3)^2}.}$
2. La tangente à la courbe de f au point d'abscisse a a pour équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.
   Ici, $a=4$, et $f(4)=\dfrac{2}{4-3}=2$.
   Comme $f'(x)=\dfrac{-2}{(x-3)^2}$, $f'(4)=\dfrac{-2}{(4-3)^2}=-2$.
   $y=f'(4)(x-4)+f(4)=-2(x-4)+2=-2x+10$.
   $\boxed{\text{Donc } \mathcal{T} \text{ a pour équation } y=-2x+10.}$
3. Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{T}$.
   On étudie le signe de $f(x)-(-2x+10)$.
   Soit $x>3$.
   $f(x)-(-2x+10)=\dfrac{2}{x-3}+2x-10$
   $f(x)-(-2x+10)=\dfrac{2+(2x-10)(x-3)}{x-3}$
   $f(x)-(-2x+10)=\dfrac{2x^2-16x+32}{x-3}$
   $f(x)-(-2x+10)=\dfrac{2(x^2-8x+16)}{x-3}=\dfrac{2(x-4)^2}{x-3}$.
   Sur l'intervalle $]3;+\infty[$, $x-3>0$.
   Un carré est toujours positif, donc $(x-4)^2\geqslant 0$, et $2(x-4)^2\geqslant 0$.
   Donc pour tout $x>3$, $f(x)-(-2x+10)\geqslant 0$.
   $\boxed{\text{Sur }]3;+\infty[, \text{ la courbe de } f \text{ est toujours située au-dessus de la tangente } \mathcal{T}.}$
4. Soit (d) la droite d'équation $y=-\dfrac{1}{2}x+5$. Montrer que la courbe de f admet une unique tangente T' parallèle à (d), et préciser les coordonnées du point de contact de $\mathcal{C}$ avec T'.
   Soit $a>3$. La tangente au point d'abscisse a est parallèle à (d) si et seulement si elle a le même coefficient directeur, soit $-\dfrac{1}{2}$.
   $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a.
   On résout donc l'équation $f'(x)=-\dfrac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
-\frac{2}{(x-3)^2} &= -\frac{1}{2}\\
(x-3)^2 &= 4\\
(x-3)^2-2^2 &= 0\\
(x-3-2)(x-3+2) &= 0\\
(x-5)(x-1) &= 0\\
x-5=0 &\text{ ou } x-1=0\\
x=5 &\text{ ou } x=1
\end{aligned}$$

Comme f est définie sur $]3;+\infty[$, on retient seulement $x=5$.
On a $f(5)=\dfrac{2}{5-3}=1$.
$\boxed{\text{La courbe de } f \text{ admet une unique tangente } T' \text{ parallèle à } (d). \text{ Il s'agit de la tangente au point } A(5;1).}$