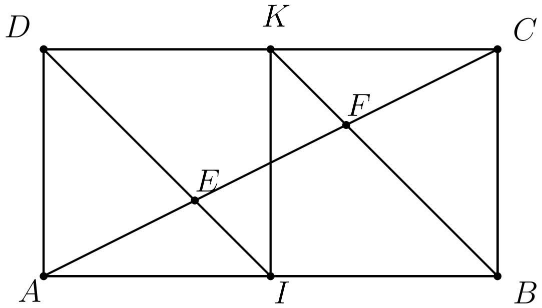
1re S. Correction du devoir maison n° 4

Exercice 1 (n° 104 page 153)

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 2AD$. I et K sont les milieux de $[AB]$ et $[CD]$ respectivement.



1. Exprimer $\overrightarrow{DI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DI} &= \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AI}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

   En effet, comme I est le milieu de $[AB]$, $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

2. Soit E le point défini par $\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DI}$.
   (a) Exprimer $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}\\ &= \overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DI}\\ &= \overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

   (b) En déduire que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
   $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
   En effet, $ABCD$ est un rectangle donc un parallélogramme et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

   (c) Que peut-on dire des points A, E, et C ?
   Comme $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
   $\boxed{\text{Donc les points } A, E \text{ et } C \text{ sont alignés.}}$

3. Soit F le symétrique de A par rapport à E.
   (a) Exprimer $\overrightarrow{AF}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$.
   Par définition du point F, E est le milieu de $[AF]$, et donc $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AE}$.
   $\boxed{\text{D'où } \overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AE} = 2\times\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.}$

   (b) En déduire $\overrightarrow{AF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
   $\boxed{\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}.}$

4. Exprimer $\overrightarrow{BK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

$\boxed{\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.}$

5. Démonter que $F \in (BK)$.

On montre que B, K et F sont alignés en prouvant que $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires.

On a déjà $\overrightarrow{BK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

On va exprimer aussi $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

On remarque que $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BK}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{BK}$ sont colinéaires, donc les points B, K et F sont alignés, et $F \in (BK)$.

Exercice 2 (n° 86 page 152)

Soient les points $A(-2;5)$, $B(2;-2)$, et $C(6;3)$.

1. Déterminer les coordonnées du point D défini par $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix}$, et $\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 12 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} x_D + 2 \\ y_D - 5 \end{pmatrix}$.

Comme $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$, on a

$\begin{cases} x_D + 2 = 12 \\ y_D - 5 = -3 \end{cases}$, et donc $\begin{cases} x_D = 10 \\ y_D = 2 \end{cases}$.

$\boxed{\text{Donc } D(10;2).}$

2. Déterminer de même les coordonnées de E défini par $\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{8}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{8}\overrightarrow{BC}$.

On obtient $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Donc $-\frac{1}{8}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{8}\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Par ailleurs, $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} x_E - 2 \\ y_E + 2 \end{pmatrix}$.

Comme $\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{8}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{8}\overrightarrow{BC}$.

$\begin{cases} x_E - 2 = 2 \\ y_E + 2 = 1 \end{cases}$, et donc $\begin{cases} x_E = 4 \\ y_E = -1 \end{cases}$.

$\boxed{\text{Donc } E(4;-1).}$

3. Montrer que B, D et E sont alignés.

On a $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Il est clair que $\overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{BE}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont colinéaires, et les points B, D et E sont alignés.