Chapitre 3 : Les fonctions. Étude de la fonction inverse

I Rappels sur la dérivation

I.1 Généralités sur les fonctions

Définition
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$.
Soit h un nombre réel proche de 0 tel que $a + h \in I$.
On dit que f est dérivable en a si le taux d'accroissement $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite réelle lorsque h tend vers 0.
Ce nombre est alors appelé le nombre dérivé de f en a, noté $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Remarque
Le nombre dérivé de f en a peut se noter $\left(\dfrac{df}{dx}\right)(a)$.

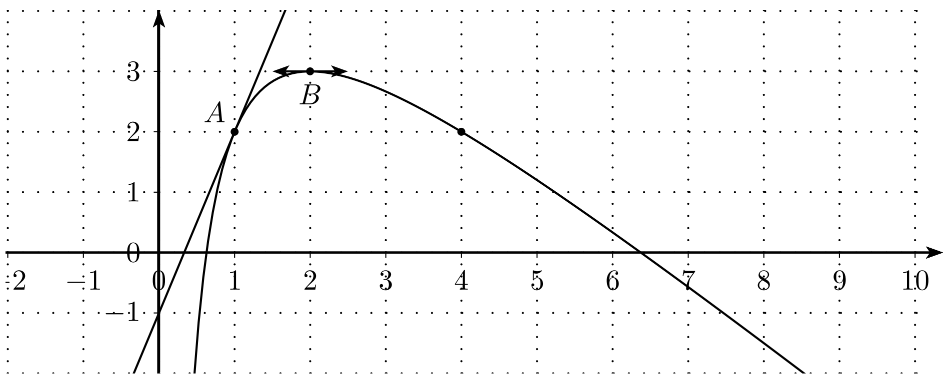
Définition
La tangente à la courbe de f au point A d'abscisse a est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.

Propriété
Soit f une fonction dérivable en un réel a.
Au point d'abscisse a la tangente à la courbe de f a pour équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Remarque
Si $f'(a) = 0$, la tangente est parallèle à l'axe des absicsse, on dit que c'est une tangente "horizontale".

Exercice 1
On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $]0; +\infty[$. On a tracé les tangentes à la courbe de f aux points A et B.



1. Lire graphiquement $f(1)$ et $f(2)$.
2. Déterminer graphiquement $f'(1)$ et $f'(2)$.
3. On admet que $f'(4) = -\dfrac{3}{4}$. Tracer la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 4. Aucune justification n'est attendue.
4. Déterminer par le calcul une équation de la tangente T_4 au point d'abscisse 4.

I.2 Dérivée d'une fonction

Définition
Soit f un fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout réel de I, c'est-à-dire si pour tout $x \in I$, $f'(x)$ existe.
Alors la fonction dérivée de f est la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$.

Théorème (Dérivées des fonctions usuelles)

Fonction f	Dérivée f'	Intervalle de validité
$f(x) = c$ (fonction constante)	$f'(x) =$	$I = \mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) =$	$I = \mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) =$	$I = \mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) =$	$I = \mathbb{R}$
$f(x) = x^3$	$f'(x) =$	$I = \mathbb{R}$
$f(x) = x^n$, $n \geqslant 1$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$I = \mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) =$	$I =]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) =$	$I = \mathbb{R}$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) =$	$I = \mathbb{R}$

I.3 Opérations sur les fonctions dérivables

Théorème
Soient u et v des fonctions dérivables sur un intervalle I, soit $k \in \mathbb{R}$. Alors :

1. Somme de fonctions.
   La fonction $(u + v)$ est dérivable sur I et $(u + v)' =$.
2. Produit par un nombre réel.
   Soit $k \in \mathbb{R}$. La fonction $(k \times u)$ est dérivable sur I et $(k \times u)' =$.
3. Produit de fonctions.
   La fonction $(u \times v)$ est dérivable sur I et $(u \times v)' =$.
4. Inverse et quotient.
   Si v ne s'annule pas sur I (c'est-à-dire $\forall x \in I$, $v(x) \neq 0$), alors
   — la fonction $\dfrac{1}{v}$ est dérivable sur I et
   $$\left(\frac{1}{v}\right)' =.$$
   — la fonction $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et
   $$\left(\frac{u}{v}\right)' =$$
5. Dérivée de u^n.
   Soit n un entier relatif.
   Si $n \leqslant -1$ et u ne s'annule pas, ou si $n \geqslant 2$, la fonction u^n est dérivable sur I et
   $$(u^n)' = nu'u^{n-1}.$$

Propriété (fonctions trigonométriques utilisées en électricité)
On considère deux nombres réels ω (représentant la pulsation en rad.s^{-1}) et φ (représentant la phase à l'origine en rad). La variable t représente le temps exprimé en s.
Les fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et

Fonction f	Fonction dérivée f'
$f(t) = \cos(\omega t + \varphi)$	$f'(t) = -\omega \sin(\omega t + \varphi)$
$f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$	$f'(t) = \omega \cos(\omega t + \varphi)$

Exercice 2
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = x^2 + \sin x$.
2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x-1)\cos x$.
3. f est définie sur $]5; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2x-10}$.
4. g est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.
5. h est définie sur $]1; +\infty[$ par $h(x) = \dfrac{4x+1}{3x-3}$.
6. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \cos(5t + \pi)$.
7. k est définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = (2x+4)^5$.

Théorème (fondamental, admis)
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. f est croissante sur I si et seulement si f' est positive sur I.
2. f est décroissante sur I si et seulement si f' est négative sur I.
3. f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur I.

Méthode pour étudier les variations d'une fonction :

1. Calculer la dérivée $f'(x)$.
2. étudier le signe de la dérivée $f'(x)$ (chercher les racines, factoriser)
3. dresser le tableau de variation de f.

Exercice 3
Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x$.

II La fonction inverse

Définition
La fonction inverse est la fonction f définie pour tout réel x non nul par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
Son ensemble de définition est $D = \mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

Remarque
La fonction inverse n'est pas définie en 0 car on ne peut pas diviser pas 0. On dit que 0 est valeur interdite pour cette fonction.

Propriété
La fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

Pour tout réel $x \neq 0$, $x^2 > 0$, donc $f'(x) < 0$.
Sur les intervalles où elle est définie, la fonction inverse est donc strictement décroissante.

Théorème
La fonction inverse est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0[$,
et strictement décroissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	||	$-$
$\dfrac{1}{x}$	$\searrow$	||	$\searrow$

II.1 Comportement aux bornes de l'ensemble de définition

On s'intéresse au comportement de la fonction inverse $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et lorsque x devient très grand (x tend vers $+\infty$) ou très petit (vers $-\infty$).

Tableau de valeurs :

x	-10^6	-10^4	-10^2	-10	10	10^2	10^4	10^6
$\dfrac{1}{x}$								

Voisinage de l'infini
On remarque que lorsque x devient très grand, les valeurs de $\dfrac{1}{x}$ deviennent très proches de 0. On dit que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ admet 0 pour limite en $+\infty$ (ou tend vers 0 en $+\infty$). On note $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.
Lorsque x tend vers $-\infty$, on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Au voisinage de 0

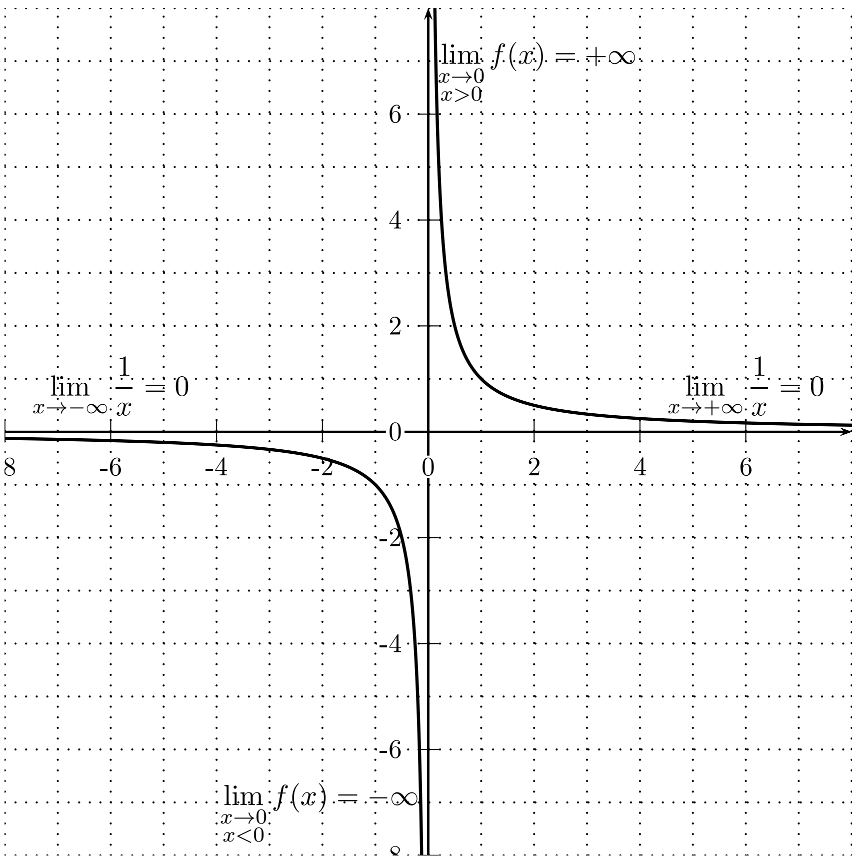
1. Si $x > 0$: lorsque x prend des valeurs proches de 0 en étant à droite de 0, les valeurs de $f(x)$ deviennent infiniment grandes.
   Nous dirons donc que f admet $+\infty$ comme limite à droite lorsque x tend vers 0.
   Notation : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ ou bien $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = +\infty$

2. Si $x < 0$: lorsque x prend des valeurs proches de 0 en étant à gauche de 0, les valeurs de $f(x)$ deviennent infiniment petites.
   De même, nous dirons que f admet $-\infty$ comme limite à gauche lorsque x tend vers 0.
   Notation : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$ ou bien $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = -\infty$

Propriété (limites de la fonction inverse)

1. A l'infini, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
2. Pour les limites en 0, on a $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = +\infty$, et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = -\infty$.

Représentation graphique de la fonction inverse $f(x) = \dfrac{1}{x}$



Remarque
La courbe représentative de la fonction inverse est une hyperbole.
L'origine du repère est centre de symétrie de la courbe (fonction impaire).

Définition

1. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, on dit que la droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. De même, l'axe des ordonnées d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe de f en 0.

On retiendra le tableau de variation complet (avec les limites) :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	0 $\searrow$	$-\infty$	$\Vert$	$+\infty$ $\searrow$	0