Fiche d'exercices sur les suites

I Variations, majoration, minoration

Exercice 1
Étudier les variation des suites suivantes.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{2n+3}$, de deux façons. En déduire que (u_n) est bornée.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (4n+5)^2$.
3. Pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$; $v_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$, $w_n = (-3)^n$.
5. Pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{1}{n^2}$, de deux façons.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{4+n}{n^2+1}$.
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n\sqrt{n}$.
8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n+5}$, de deux façons.
   Indication pour la méthode $u_{n+1} - u_n$: quantité conjuguée.

Exercice 2
Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{7n-1}{n+2}$ est croissante et majorée par 7.
En déduire que (u_n) est bornée et donner un encadrement de u_n valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3
Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{n-5}{n+3}$ est croissante et majorée par 1.
En déduire que (u_n) est bornée et donner un encadrement de u_n valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4
Soit (u_n) la suite d'efinie pour tout entier n par $u_n = \dfrac{5^n}{3 \times 2^n}$.

1. Montrer que (u_n) est croissante.
2. Montrer qu'il existe un réel q tel que pour tout entier n, $u_{n+1} = q \times u_n$. Déterminer q.

II Algorithmes : terme, somme, seuil

Exercice 5
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$, et pout tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = n - 2u_n$.

1. Calculer u_1, u_2.
2. Écrire un algorithme qui renvoie u_n pour un entier n donné en entrée ($n \geqslant 1$).
   Donner u_{20} et vérifier à l'aide du mode suite de la calculatrice.

Exercice 6
Écrire un algorithme qui renvoie S_n pour $n \geqslant 1$ donné en entrée, puis donner la valeur de S_{10}.

1. Pour tout n, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$, où $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n - 11$.
2. Pour tout n, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$, où $u_n = 4n + 7$.
3. Pour tout n, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k^2}$.

Exercice 7
Considérons la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = n + 2\sqrt{n}$.

1. Montrer que (u_n) est croissante.
2. On admet que $\lim u_n = +\infty$.
   Écrire un algorithme qui renvoie le plus petit entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^5$ (voir livre page 115).
3. Programmer l'algorithme à la calculatrice et donner la valeur de n_0.

Exercice 8
Soit (a_n) la suite définie par son premier terme $a_0 = 2$ et la relation de récurrence :

$$\text{pour tout } n \geqslant 0,\ a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + 3.$$

1. Construire la droite d'équation $y = \dfrac{2}{3}x + 3$ et la droite d'équation $y = x$ (aller au moins jusqu'à 10 en abscisses et ordonnées).
2. Construire les premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses.
3. Calculer à la main a_1, a_2 et a_3. Rédiger les calculs.
4. Utiliser la calculatrice pour donner une valeur approchée de a_{10}, a_{20}, et a_{30}. On arrondira à 0,0001 près.
5. Que peut-on conjecturer sur la convergence de la suite (a_n) ?
6. Écrire un algorithme qui renvoie le plus petit entier n_0 tel que $|a_{n_0} - 9| < 0,0001$.
7. Programmer cet algorithme à la calculatrice et indiquer la valeur de n_0.