

# Chapitre 6 : Produit scalaire dans le plan

Rappel :

La norme du vecteur  $\overrightarrow{AB}$ , notée  $\|\overrightarrow{AB}\|$ , est la distance  $AB$ .

## I Définition

### Définition

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls.

On appelle produit scalaire de  $\vec{u}$  et de  $\vec{v}$  et on note  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  le nombre réel défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$$

Lorsque  $\vec{u}$  ou  $\vec{v}$  est nul, on pose  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

### Exercice 1

Calculer  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  dans chacun des cas suivants :

1. on donne  $\|\vec{u}\| = 7$ ,  $\|\vec{v}\| = 4$  et  $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi}{4}$ .
2. on donne  $\|\vec{u}\| = 3$ ,  $\|\vec{v}\| = 8$  et  $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{5\pi}{6}$ .

### Exercice 2

Appliquer la formule du cosinus : [ressource 363](#)

### Remarque

1. Avec cette définition, comme  $\cos(-x) = \cos(x)$ , on montre facilement la symétrie du produit scalaire :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

2. Pour tout vecteur  $\vec{u}$ , on a  $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|^2$ .

### Remarque

Comme  $\cos(-x) = \cos(x)$ , on peut utiliser la mesure d'un angle géométrique à la place de celle de l'angle orienté correspondant dans la formule du cosinus.

### Propriété

Pour tous points  $A$ ,  $B$  et  $C$  deux à deux distincts,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$$

### Exercice 3

Calculer le produit scalaire  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  dans chacun des cas suivants :

1.  $ABC$  est un triangle équilatéral de côté 6 cm.
2.  $ABC$  est un triangle rectangle isocèle en  $A$ , avec  $AB = AC = 2$  cm.

### Remarque (vecteurs colinéaires)

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs colinéaires non nuls.

- Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont de même sens, alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ .
- Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont de sens contraires, alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ .



**Exercice 4 (2 points)**

Les points  $A, B, C, D, E, F, G, H$  sont placés régulièrement sur une droite. On donne  $AB = 1$ .



Déterminer les produits scalaires suivants. Justifier.

1.  $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CG} = \dots\dots\dots$
2.  $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EB} = \dots\dots\dots$

**Remarque**

Le produit  $\vec{u} \cdot \vec{u}$  est parfois noté  $\vec{u}^2$ . On a donc  $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ .

**Propriété (formule du projeté orthogonal, admise)**  
 Soient  $\vec{u}, \vec{v}$  des vecteurs non nuls, et  $\vec{v}'$  le projeté orthogonal de  $\vec{v}$  sur  $\vec{u}$ . Alors,

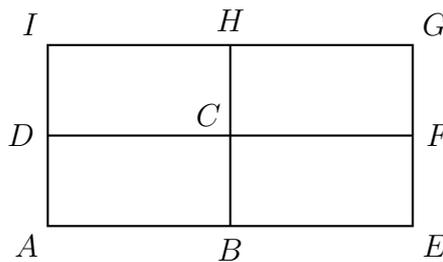
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}'$$

Lorsque  $\vec{u}$  ou  $\vec{v}$  est le vecteur nul, on pose  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .



**Exercice 5**

Compléter avec un vecteur.

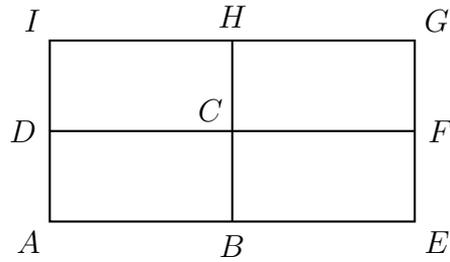


1. Le projeté orthogonal du vecteur  $\overrightarrow{AG}$  sur la droite  $(AB)$  est ...
2. Le projeté orthogonal du vecteur  $\overrightarrow{FH}$  sur la droite  $(AB)$  est ...
3. Le projeté orthogonal du vecteur  $\overrightarrow{ED}$  sur la droite  $(AB)$  est ...
4. Le projeté orthogonal du vecteur  $\overrightarrow{DH}$  sur la droite  $(AD)$  est ...
5. Le projeté orthogonal du vecteur  $\overrightarrow{CF}$  sur la droite  $(AD)$  est ...
6. Le projeté orthogonal du vecteur  $\overrightarrow{BG}$  sur la droite  $(AD)$  est ...

**Exercice 6**

Dans la figure suivante, on donne  $AB = BE = 6$ , et  $AD = DI = 3$ .

Calculer les produits scalaires à l'aide du projeté orthogonal.



1.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} =$
2.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{FH} =$
3.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ED} =$
4.  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DH} =$
5.  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CF} =$
6.  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BG} =$

### Exercice 7 (Formule du projeté orthogonal)

Représenter un vecteur connaissant son produit scalaire avec un vecteur donné : [ressource 450](#)

## II Autres expressions du produit scalaire

### II.1 Expression en repère orthonormé

#### Théorème (Expression dans un repère orthonormé)

Soit  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormé.

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  des vecteurs de coordonnées  $\vec{u}(x, y)$  et  $\vec{v}(x', y')$ . Alors,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

#### Conséquence (Lien entre distance et produit scalaire)

1.  $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2$ . D'où

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

2. Distance entre deux points  $A(x_A, y_A)$  et  $B(x_B, y_B)$  :

Les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  sont  $(x_B - x_A, y_B - y_A)$ .

On retrouve la formule de la distance entre deux points vue en seconde.

$$\|\overrightarrow{AB}\| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

### Exercice 8

Dans un repère orthonormé, on donne les points  $E(1; -4)$ ,  $F(5; 3)$ , et  $G(-2; -5)$ .

1. Montrer que  $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = -19$ .
2. Calculer  $EF$  et  $EG$ .
3. En déduire la valeur exacte de  $\cos(\widehat{FEG})$ , puis la mesure de l'angle  $\widehat{FEG}$  arrondie à un degré près.

## II.2 Expressions avec les normes

### Théorème (Expressions à l'aide des normes)

Pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ ,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left( \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \right)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left( \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right)$$

## III Propriétés du produit scalaire

### Propriété

Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ , et  $\vec{w}$  des vecteurs quelconques, et  $k$  un nombre réel.

1. Symétrie.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

2. Linéarité (et même bilinéarité avec la symétrie).

- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$ .
- $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$  et  $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$ .

Ces deux derniers points traduisent la bilinéarité du produit scalaire.

On notera l'analogie avec les règles de calcul sur le produit des nombres réels.

### Définition (Vecteurs orthogonaux)

Deux vecteurs non nuls  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux si  $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$  ou  $(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

Le vecteur nul est considéré orthogonal à tout vecteur.

### Propriété

Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

### Remarque

L'orthogonalité des vecteurs  $\vec{u}(x, y)$  et  $\vec{v}(x', y')$  se traduit de façon analytique par :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$$

### Propriété (Identités remarquables)

1.  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
2.  $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
3.  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

### Remarque

On reconnaît dans les deux premières identités les expressions du produit scalaire avec les normes, il suffit d'isoler  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  pour s'en convaincre.

### Exercice 9

1. Utiliser l'expression du produit scalaire en repère orthonormé : [ressource 572](#)
2. Déterminer le produit scalaire de 2 vecteurs représentés dans un quadrillage : [ressource 451](#)
3. Déterminer une coordonnée d'un vecteur orthogonal à un autre vecteur : [ressource 361](#)