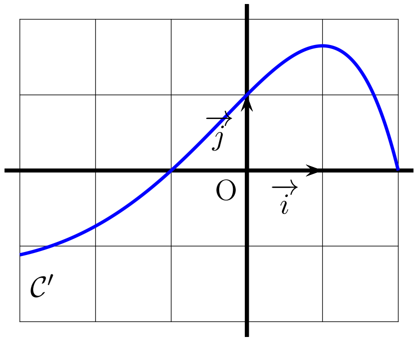
Devoir maison n° 11
À rendre le jeudi 11 avril 2019

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$.
On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$.
On dispose des informations suivantes :

- $f(0) = -1$.
- la **dérivée** f' de la fonction f admet la courbe représentative $\mathcal{C}'$ ci -dessous.



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et **justifier la réponse.**

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3, -1]$, $f'(x) \leq 0$.
2. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1\ ;\ 2]$.
3. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$, $f(x) \geq -1$.
4. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.
   La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées $(1\,;\,0)$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[1; 7]$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{3-4x}$.

1. Justifier que f est dérivable sur $[1; 7]$.
2. Calculer $f'(x)$.
3. Déterminer un encadrement de $f(x)$ valable pour tout $x \in [1; 7]$.

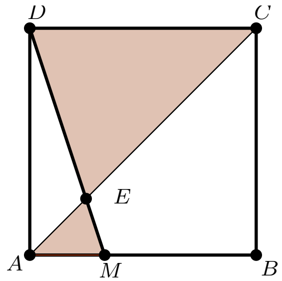
Exercice 3

Soit x un réel de $\left[-\dfrac{\pi}{2}; 0\right]$ tel que $\cos x = \dfrac{2}{3}$.
On note M le point du cercle trigonométrique associé au réel x.

1. Faire une figure, placer M.
2. Déterminer $\sin x$. Justifier.
3. Déterminer $\sin(\pi - x)$, $\cos(\pi - x)$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$.

Exercice 4 (facultatif)

On considère un carré $ABCD$ de côté 1 et M un point mobile sur le segment $[AB]$.
Les droites (DM) et (AC) se coupent en un point E.
Le but du problème est de déterminer l'aire colorée minimale, ainsi que la ou les positions du point M rendant cette aire minimale.



1. **Étude expérimentale**
   (a) Réaliser la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
   (b) On s'intéresse à la valeur minimum de l'aire de la surface colorée, que l'on note $\mathcal{A}$.
   On choisit pour variable $x = AM$.
   Faire afficher par le logiciel le lieu des points de coordonnées $(x, \mathcal{A})$. (il suffit de faire afficher la "Trace" des points).
   Émettre une conjecture qui répond au problème posé.
2. **Étude algébrique**
   On pose $AM = x$ et on note H et K les pieds des hauteurs issues de E dans les triangles EAM et ECD.
   (a) À quel intervalle appartient x ?
   (b) Démontrer que $EH = \dfrac{x}{x+1}$ et $EK = \dfrac{1}{x+1}$
   (c) En déduire qu'une expression de l'aire colorée est $\mathcal{A}(x) = \dfrac{x^2+1}{2(x+1)}$.
   (d) Démontrer la conjecture du 1.