1G – Spécialité mathématiques

1 Suites

Exercice 1
Une entreprise emprunte 2 000 000 € à une banque, à rembourser par mensualités sur 10 ans.

Partie A
Dans la première formule proposée par la banque, l'entreprise rembourse 8000 € lors de la première mensualité, puis chaque mensualité suivante augmente de
300 €. On appelle u_1 la première mensualité et u_{120} la dernière.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   Reconnaître la nature de la suite (u_n) et préciser ses caractéristiques.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Calculer la somme totale remboursée en 10 ans par l'entreprise.

Partie B
La banque propose une deuxième formule à l'entreprise : on appelle v_1 le premier versement, à déterminer. Chaque mensualité augmente de 1 % par rapport à la précédente, jusqu'à v_{120}.

1. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   Reconnaître la nature de la suite (v_n) et préciser ses caractéristiques.
2. Exprimer v_n en fonction de n et de v_1.
3. Exprimer le versement total en 10 ans en fonction de v_1 (On donnera une valeur exacte).
4. Que doit valoir v_1 pour que le versement total soit de 3 000 000 € seulement ? on arrondira au centime près.

2 Fonction exponentielle

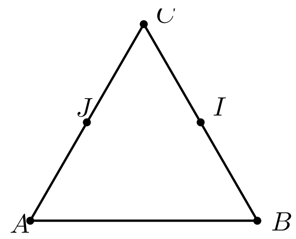
Exercice 2
Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = (x-1)(2-\mathrm{e}^{-x})$.

1. (a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 2(1-\mathrm{e}^{-x})$.
   (b) Justifier que pour tout $x > 0$, $1-\mathrm{e}^{-x} > 0$.
   (c) En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[0;+\infty[$ (on précisera $f'(0)$).
   (d) Dresser le tableau de variation de f sur $[0;+\infty[$.
2. Déterminer le point A où la tangente à la courbe représentative de f est parallèle à la droite Δ d'équation $y = 2x-5$.

3 Produit scalaire et applications

Exercice 3
Soit ABC un triangle équilatéral de côté 6. On note I le milieu de $[BC]$, et J le milieur de $[AC]$. Calculer les produits scalaires suivants (on justifiera soigneusement) :

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BI}$
3. $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{CJ}$



Exercice 4

1. Dans un repère orthonormé du plan, on donne les points $A(1;-1)$ et $B(-3;1)$.
   Déterminer une équation de la hauteur issue de A dans le triangle OAB.
2. Justifier que les droites $\mathscr{D}_1 : 2x-y+1=0$ et $\mathscr{D}_2 : 3x+6y+5=0$ sont perpendiculaires.

4 Probabilité. Variable aléatoire

Exercice 5
Une urne comprend 5 boules rouges et $n-5$ boules noires, où $n \geqslant 5$.

1. Un joueur tire au hasard, successivement et **avec remise** deux boules de l'urne.
   (a) Soit A l'événement « les deux boules tirées sont de couleurs différentes ».
   En s'aidant d'un arbre, calculer la probabilité $p_n(A)$ de l'événement A.
   (b) En étudiant les variations de la fonction f définie sur $[5;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{10(x-5)}{x^2}$, déterminer pour quelles valeurs de n le joueur a le plus de chances de réaliser A.

2. Un joueur tire au hasard, successivement et **sans remise** deux boules de l'urne.
   (a) On note B l'événement « les deux boules tirées sont de couleurs différentes ».
   En s'aidant d'un arbre, calculer la probabilité $p_n(B)$ de l'événement B.
   (b) Le joueurs gagne 2 euros s'il réalise B et perd 1 euros dans le cas contraire.
   Soit X le gain algébrique du joueur. Montrer que $E(X) = \dfrac{-n^2+31n-150}{n^2-n}$.
   Déterminer la composition de l'urne pour que le jeu soit équitable.

5 Dérivation

Exercice 6

Calculer l'expression de la dérivée des fonctions suivantes.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$.
2. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = (x^2-1)\sqrt{x}$.
3. f est définie sur $]4;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5}{8-2x}$.
4. f est définie sur $]5;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2-3x}{x-5}$.

Exercice 7

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction racine carrée définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

Soit (d) la droite d'équation $y = \dfrac{1}{4}x - 1$.

1. Montrer qu'il existe une unique tangente à la courbe $\mathscr{C}$ parallèle à la droite (d).
2. Déterminer une équation de cette tangente.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;0[\,\cup\,]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.

1. Calculer le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
2. Montrer que pour tout réel $a \neq 0$, la tangente T_a à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a a pour équation réduite $y = -\dfrac{1}{a^2}x + \dfrac{2}{a}$.
3. En déduire le nombre de tangentes à $\mathscr{C}_f$ qui passent par le point $K(-1;2)$ (On ne demande pas de déterminer une équation de ces tangentes).

Exercice 9

On a tracé ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

La droite T_1 est tangente à la courbe en B, et la courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point A.

A : Lectures graphiques

1. Lire graphiquement $f(-2)$ et $f(0)$. Aucune justification n'est demandée.
2. Déterminer graphiquement $f'(-2)$ et $f'(0)$. Justifier.

B : Calculs de dérivées et applications

On admet désormais que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{8}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 - 4$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Vérifier que $f'(4) = 2$ et tracer la tangente associée sur le graphique. On fera apparaître les traits de construction.
3. (a) Montrer que la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2 est la droite (d) d'équation $y = -\dfrac{1}{2}x - 4$.
   (b) Tracer (d).
   (c) Étudier par le calcul la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de (d).