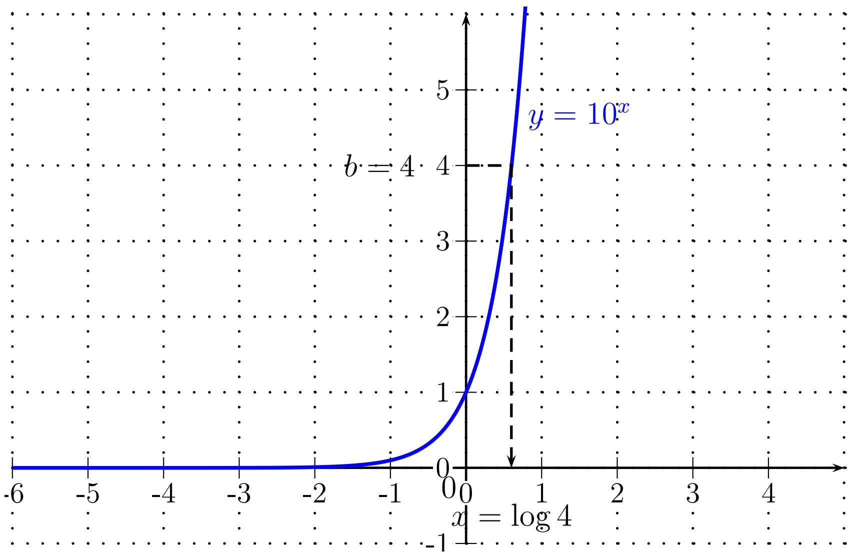
Chapitre 4 : La fonction logarithme décimal

Les logarithmes ont été inventés par John Napier (1550 – 1617), mathématicien écossais.
On doit à Henry Briggs (1561 – 1630) l'adoption de la base dix et les premières tables de logarithmes décimaux.

I Définition de la fonction logarithme décimal

Notons f la fonction exponentielle de base 10, $f(x) = 10^x$.
Comme $10 > 1$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



Définition

1. Soit b un nombre réel strictement positif.
   L'équation $10^x = b$ admet une unique solution réelle.
   Le logarithme décimal de b est le nombre réel x tel que $10^x = b$.
   Il est noté $\log(b)$, ou $\log b$.
2. La fonction qui, à tout réel $b > 0$, associe l'unique solution réelle de l'équation $10^x = b$ s'appelle la fonction logarithme décimal, et se note log.

$$\log : \begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ b & \mapsto & \log b \end{array}$$

En particulier,

1. Comme $10^0 = 1$, on a $\log(1) = 0$.
2. Comme $10^1 = 10$, on a $\log(10) = 1$

Exercice 1

1. Calculer $\log(100)$, puis $\log(0,001)$.
   ....
   ....
2. Compléter le tableau.

x	100	1000	10 000	10^6	0,01	10^{-3}	10^{-7}
$\log(x)$							

3. Que peut-on conjecturer ?
   ....

Propriété
Pour tout $b > 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x = \log b \quad \text{ssi} \quad 10^x = b$

Remarque
1. Pour tout réel $b > 0$, $10^{\log b} = b$
2. Pour tout nombre réel x, $\log(10^x) = x$.

Exercice 2
Résoudre les équations.
1. $10^x = 3$
2. $10^x = 0,02$
3. $\log x = 5$
4. $2\log(x) + 9 = 0$

II Étude de la fonction log

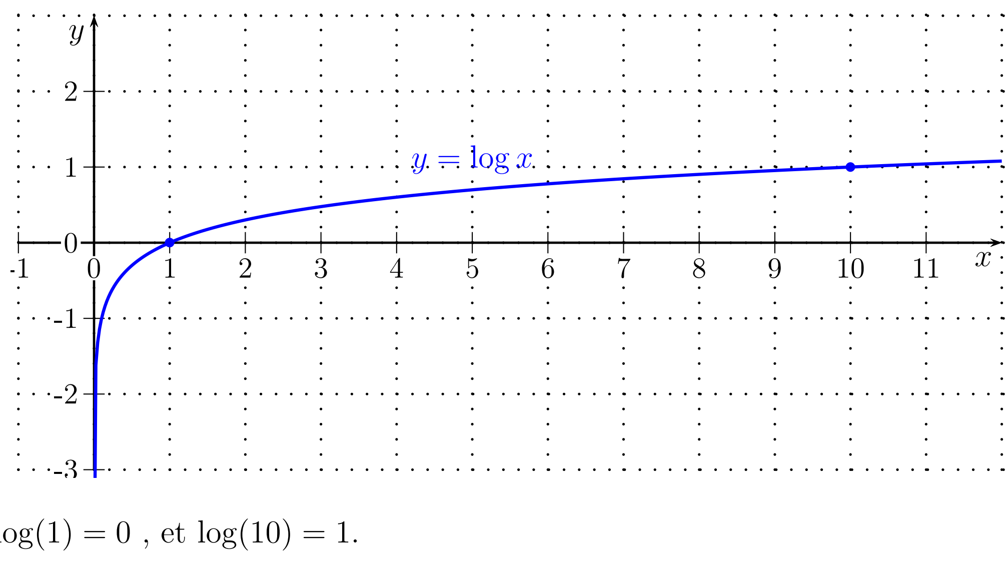
Remarque
Le logarithme décimal s'obtient par la touche `log` de la calculatrice.
En Python, il s'obtient avec la fonction `log10` (en important la bibliothèque `math`).

Exercice 3
1. À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau en arrondissant les valeurs à 10^{-1} près.

x	0,003	0,4	0,8	1	1,3	6	10	500	10^4	10^{19}
$\log(x)$ arrondi à 0,1 près										

2. Que peut-on conjecturer sur le sens de variation de la fonction log ?
   ....
3. Que peut-on conjecturer sur le signe de $\log(x)$?
   ....

Courbe représentative



Rappel : $\log(1) = 0$, et $\log(10) = 1$.

Propriété

1. La fonction log est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
2. Pour tous a et b appartenant à $]0;+\infty[$,
   (a) $\log a = \log b$ ssi $a = b$,
   (b) $\log a < \log b$ ssi $a < b$.
3. Signe de la fonction log :
   (a) $\log x = 0$ ssi $x = 1$.
   (b) $\log x < 0$ ssi $0 < x < 1$,
   (c) $\log x > 0$ ssi $x > 1$,

x	0		1		$+\infty$
$\log(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Exercice 4
Résoudre les inéquations suivantes (attention à l'ensemble de définition de l'inéquation).

1. $\log(x) < \log(2,3)$.
2. $\log(x) > \log(18)$.
3. $x\log(3,5) \geqslant 17$.
4. $x\log(0,17) \leqslant -11$.

III Propriétés algébriques de la fonction log

Propriété (propriété fondamentale des logarithmes)
Pour tous réels a et b strictement positifs,

$$\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$$

La fonction log transforme un produit en somme.

Exemple :
$\log(6) = \dots$

Exercice 5 (éléments de démonstration)
Soient a et b des réels strictement positifs.

1. En utilisant la propriété fondamentale des logarithmes, exprimer en fonction de $\log(a)$ les nombres suivants, où a est un réel strictement positif.
   $\log(a^2) =$ $\log(a^3) =$
   $\log(a^4) =$
2. Conjecturer une formule générale pour $\log(a^n)$ où $n \in \mathbb{N}$.
   ....
3. En remarquant que $b \times \dfrac{1}{b} = 1$, exprimer $\log\left(\dfrac{1}{b}\right)$ en fonction de $\log(b)$. ....
   ....
4. En déduire une expression de $\log\left(\dfrac{a}{b}\right)$.

   ....

Propriété
Pour tous réels a et b strictement positifs, et pour tout réel x,

1. $\log\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\log a$,
2. $\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$,
3. $\log(a^x) = x\log(a)$

Exemple :
$\log\left(\dfrac{1}{2}\right) =$

$\log\left(\dfrac{7}{3}\right) =$

$\log(5^6) =$

$\log(8) =$

IV Applications

IV.1 Résolutions d'équations et d'inéquations

Exercice 6 (équation $\log x = k$)
Résoudre $2\log x - 1 = 7$.

Exercice 7 (équation $a^x = b$)
Résoudre $2^x = 31$.

Exercice 8 (inéquation $a^x > b$)
Résoudre $0,7^x > 3$.

Exercice 9 (équation $x^a = b$)
Résoudre l'équation $x^{0,3} = 6$.

Exercice 10 (inéquation du type $a^n > b$ avec $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$)
Un lac de montagne est alimenté par une rivière et régulé par un barrage. On modélise l'évolution du niveau d'eau du lac par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = 375 \times 1,06^n + 250$, le terme u_n représentant le niveau d'eau du lac (en cm) , n jours après le 1er janvier 2020. Lorsque le niveau d'eau dépasse 10 mètres, l'équipe d'entretien doit agrandir l'ouverture des vannes du barrage.
Calculer la première date d'intervention des techniciens sur les vannes du barrage.

IV.2 Ordre de grandeur d'un nombre strictement positif

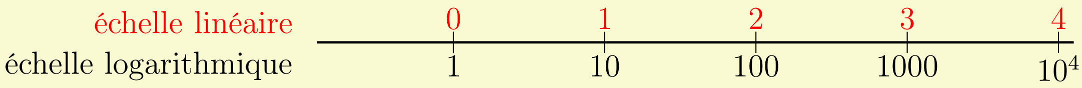
Pour donner un ordre de grandeur d'un nombre x strictement positif (dont on ne connaît pas l'écriture scientifique), on peut utiliser son logarithme décimal.
Exemple :
Donner l'ordre de grandeur de $x = 2,7^{404}$.

. . . .
. . . .
. . . .

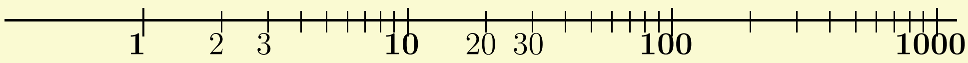
IV.3 Repère logarithmique ou semi-logarithmique

Définition

1. Une échelle logarithmique est un système de graduation où les graduations principales sont les termes d'une suite géométrique de raison 10 : le point associé à la graduation x (x réel strictement positif) est placé à une distance $\log(x)$ du point associé à la graduation 1.



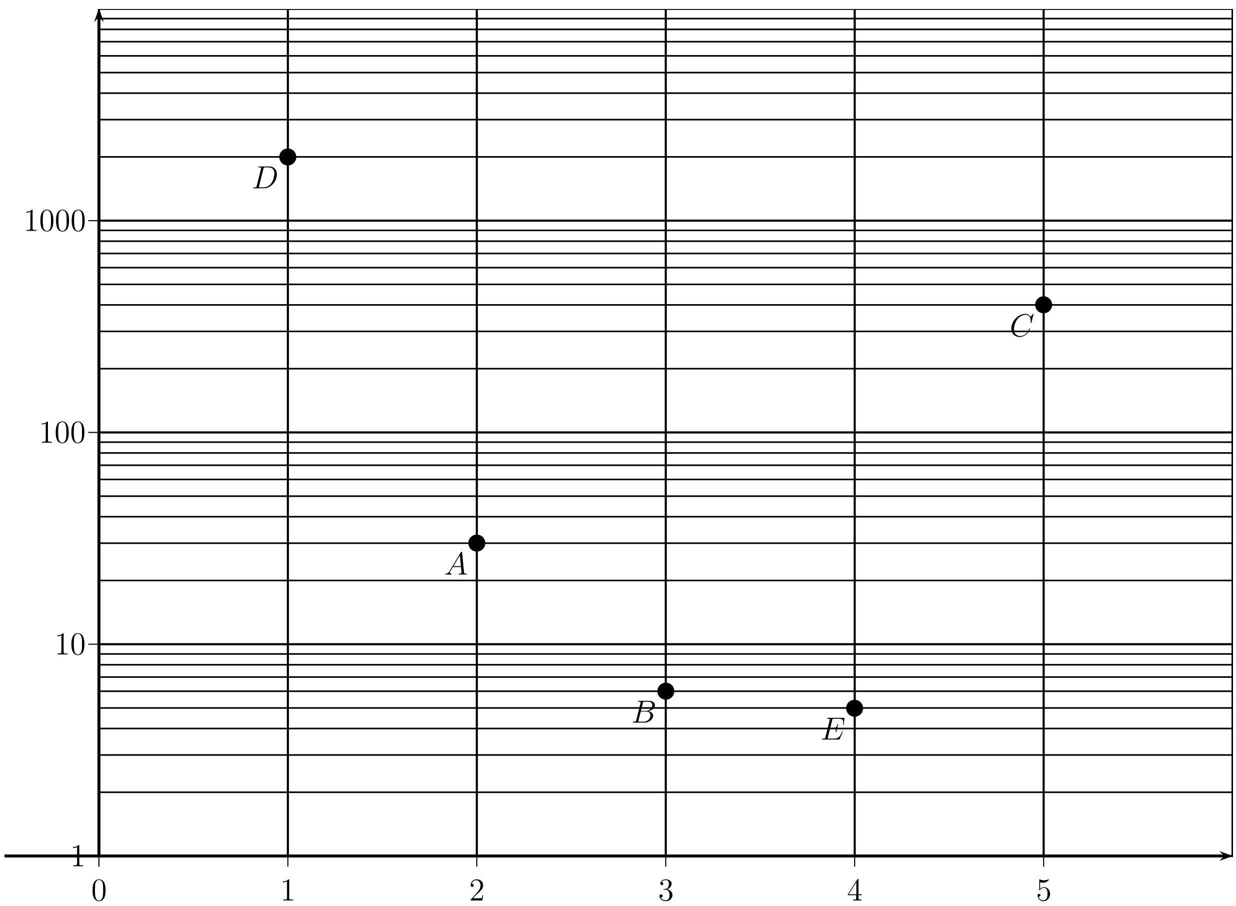
Pour graduer entre 1 et 10, on calcule $\log(2)$, $\log(3)$, ..., $\log(9)$.
Ensuite, on reproduit les graduations faites entre 1 et 10, on les place entre 10 et 100, puis entre 100 et 1000, etc.



2. Un repère logarithmique est un repère du plan dans lequel les deux axes sont gradués selon une échelle logarithmique.
3. Un repère semi-logarithmique est un repère du plan dans lequel un seul des axes est gradué selon une échelle logarithmique.

Exercice 11

Dans le repère semi-logarithmique, on a placé le point $A(2;30)$.



1. Lire les coordonnées des points B, C, D et E.
2. Placer $F(1;300)$.