Devoir de mathématiques n° 3

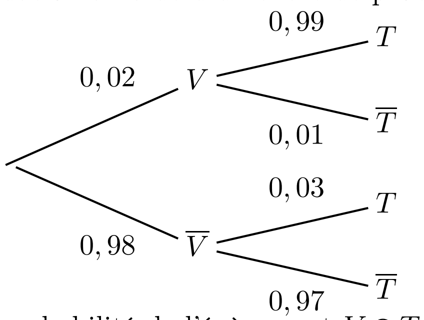
Éléments de correction du Sujet 1

Exercice 1 (1 point)

Soient A et B deux événements, avec $P(A) \neq 0$.
La probabilité de B sachant A est $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A}$.

Exercice 2 (5 points)

1. (a) Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.



(b) En déduire la probabilité de l'évènement $V \cap T$.

$\boxed{P(V \cap T) = P(V) \times P_V(T) = 0,02 \times 0,99 = 0,0198.}$

2. Déterminer $P(T)$. Justifier.

V et $\overline{V}$ forment une partition de Ω. D'après la formule des probabilités totales,

$\boxed{P(T) = P(V \cap T) + P(\overline{V} \cap T) = 0,0198 + 0,98 \times 0,03 = 0,0492.}$

3. (a) Justifier par un calcul la phrase : « Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée ».

$$\boxed{P_T(V) = \frac{P(V \cap T)}{P(T)} = \frac{0,0198}{0,0492} \approx 0,4024.}$$

En effet, si la personne a un test positif, il y a environ 40% de "chances" qu'elle soit contaminée par le virus.

(b) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

$P(\overline{T}) = 1 - P(T) = 1 - 0,0492 = 0,9508$.

Donc $P_{\overline{T}}(\overline{V}) = \dfrac{P(\overline{V} \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \dfrac{0,98 \times 0,97}{0,9508} \approx 0,9998$.

Sachant que son test est négatif, la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée est d'environ 0,9998.

Exercice 3 (3 points)

On étudie un nouveau logiciel qui est censé filtrer les messages indésirables (ou spams) sur une messagerie électronique.
Les concepteurs l'ont testé pour 1 000 messages reçus et ont observé que :

- 70% des messages reçus sont des spams
- 95% des spams sont éliminés
- 2% des messages bienvenus sont éliminés

1. Compléter le tableau d'effectifs suivant :

	Spams	Messages bienvenus	Total
Messages éliminés	665	6	671
Messages conservés	35	294	329
Total	700	300	1 000

2. On choisit un message au hasard. Tous les messages ont la même probabilité d'être choisis. On considère les événements suivants :
   - S : « le message est un spam »
   - E : « le message est éliminé »

   On notera respectivement $\overline{S}$ et $\overline{E}$ leurs contraires.

(a) Donner sans justification $P(S)$ et $P(E)$, $P(S \cap E)$, et $P_S(\overline{E})$.

$P(S) = \dfrac{700}{1000} = 0,7$; $P(E) = 0,671$; $P(S \cap E) = 0,665$; et
$P_S(\overline{E}) = \dfrac{35}{700} = 0,05$.

(b) S et E sont-ils indépendants ? Justifier.

S et E sont indépendants ssi $P(E) = P_S(E)$.
Or, $P(E) = 0,671$, et $P_S(E) = 0,95$ (d'après l'énoncé : 95% des spams sont éliminés).
Sinon, $P_S(E) = 1 - P_S(\overline{E}) = 1 - 0,05 = 0,95$.

Donc $P(E) \neq P_S(E)$. S et E ne sont pas indépendants.

(c) Le logiciel se trompe s'il conserve un spam ou s'il élimine un message bienvenu.
Quelle est la probabilité de l'événement A : « le logiciel se trompe » ?

$$\boxed{P(A) = P(S \cap \overline{E}) + P(\overline{S} \cap E) = \frac{35}{1000} + \frac{6}{1000} = 0,041.}$$

Exercice 4 (3 points)

1. Soit (a_n) la suite définie pour tout entier n par $a_n = \left(3 - \frac{1}{2}n\right)^2$.
   Calculer a_0, a_1 et a_2.
   $a_0 = \left(3 - \frac{1}{2} \times 0\right)^2 = 9$. $a_1 = \left(3 - \frac{1}{2} \times 1\right)^2 = \frac{25}{4}$.
   $a_2 = \left(3 - \frac{1}{2} \times 2\right)^2 = 4$.

2. Soit (b_n) la suite définie par $b_0 = 5$ et pout tout $n \geqslant 0$, $b_{n+1} = -\frac{2}{3}b_n + 1$. Calculer b_1 et b_2.
   $b_1 = -\frac{2}{3}b_0 + 1 = -\frac{2}{3} \times 5 + 1 = -\frac{7}{3}$.
   $b_2 = -\frac{2}{3}b_1 + 1 = -\frac{2}{3} \times \left(-\frac{7}{3}\right) + 1 = \frac{23}{9}$.

3. Soit (c_n) la suite définie par $c_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = c_n - n^2 + 3$. Calculer c_1 et c_2.
   $c_1 = c_0 - 0^2 + 3 = 3 - 0 + 3 = 6$.
   $c_2 = c_1 - 1^2 + 3 = 6 - 1 + 3 = 8$.

Exercice 5 (1,5 point)

On place un capital de 15 000 euros sur un livret d'épargne rémunéré à 3,5 % d'intérêts composés. On suppose que l'on dépose 600 euros chaque début d'année à partir de la deuxième année.
On pose $C_0 = 15\,000$ et l'on note C_n le capital présent au bout de la n-ième année après le dépôt de 600 euros.

1. Calculer C_1, capital au bout d'un an après le dépôt de 600 euros.
   Augmenter de 3,5% revient à multiplier par
   $c = 1 + t = 1 + 0,035 = 1,035$.
   $C_1 = C_0 \times 1,035 + 600 = 15\,000 \times 1,035 + 600 = 16\,125$.
   $\boxed{\text{Au bout d'un an, on a 16 125 euros sur le livret.}}$
2. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n.
   $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ C_{n+1} = 1,035 \times C_n + 600.}$

Exercice 6 (2,5 points)

On considère la suite (V_n) définie par $V_0 = 100$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = 3V_n - 20$.

1. À l'aide de la calculatrice, donner la valeur de V_{10}.
   $\boxed{V_{10} = 5\,314\,420.}$
2. Écrire une fonction Python d'argument n qui renvoie la valeur de V_n pour tout entier $n \geqslant 0$.

```
def Terme(n) :
    u=100
    for k in range(1,n+1):
        u=3*u-20
    return(u)
```

Exercice 7 (3 points)

1. La partie restante du terrain est un rectangle de dimensions $(30 - x)$ et $(12 - x)$.
   Son aire a pour expression :
   $(30 - x)(12 - x) = x^2 - 30x - 12x + 30 \times 12 = x^2 - 42x + 360$.
   On souhaite que cette aire soit supérieure à 280.
   D'où l'inéquation :
   $$\begin{aligned} x^2 - 42x + 360 &\geqslant 280 \\ x^2 - 42x + 80 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

2. On étudie le signe du trinôme $x^2 - 42x + 80$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 42^2 - 4 \times 1 \times 80 = 1444 = 38^2 > 0$.
   Le trinôme a donc deux racines :
   $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{42 - 38}{2} = 2$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{42 + 38}{2} = 40$
   Le trinôme est positif (signe de a, ici $a = 1$) à l'extérieur des racines, et du signe de $-a$ entre les racines.

x	$-\infty$		2		40		$+\infty$
$x^2 - 42x + 80$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Donc $x^2 - 42x + 80 \geqslant 0$ sur $]-\infty; 2] \cup [40; +\infty[$.
   D'après le contexte, la largeur x du chemin est comprise en 0,8 m et 12 m.
   $\boxed{\text{Donc la largeur du chemin doit être entre 0,8 m et 2 m.}}$

Exercice 8 (bonus, 1 point)

Notons $a = 2 - \sqrt{5}$.
Alors, $a^2 = (2 - \sqrt{5})^2 = 4 - 4\sqrt{5} + 5 = 9 - 4\sqrt{5} = 1 + (8 - 4\sqrt{5}) = 1 + 4a$.
Ainsi, $a^2 = 4a + 1$, soit $a^2 - 4a - 1 = 0$.
$\boxed{\text{Donc } a = 2 - \sqrt{5} \text{ est racine du trinôme } x^2 - 4x - 1.}$

Devoir de mathématiques n° 2

Éléments de correction du sujet 2

Exercice 9 (1 point)

Énoncer la formule des probabilités totales associée à une partition A_1, A_2, ..., A_n de l'univers.

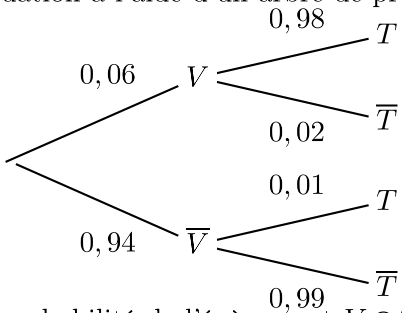
Pour tout événement B,

$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)$

$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \cdots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$.

Exercice 10 (5 points)

1. (a) Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.



   (b) En déduire la probabilité de l'évènement $V \cap T$.

   $\boxed{P(V \cap T) = P(V) \times P_V(T) = 0,06 \times 0,98 = 0,0588.}$

2. Déterminer la probabilité que le test soit positif.

   $\boxed{P(T) = P(V \cap T) + P(\overline{V} \cap T) = 0,0588 + 0,94 \times 0,01 = 0,0682.}$

3. (a) L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier. « Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée ».

   $P_T(V) = \dfrac{P(V \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,0588}{0,0682} \approx 0,86.$

   $\boxed{\text{L'affirmation est fausse.}}$

   (b) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

   $\boxed{P_{\overline{T}}(\overline{V}) = \dfrac{P(\overline{V} \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \dfrac{0,94 \times 0,99}{1 - 0,0682} \approx 0,9987.}$

Exercice 11 (4 points)

On étudie un nouveau logiciel qui est censé filtrer les messages indésirables (ou spams) sur une messagerie électronique.

Les concepteurs l'ont testé pour 1 000 messages reçus et ont observé que :

- 75% des messages reçus sont des spams
- 96% des spams sont éliminés
- 4% des messages bienvenus sont éliminés

1. Compléter le tableau d'effectifs suivant (aucune justification n'est attendue) :

	Spams	Messages bienvenus	Total
Messages éliminés	720	10	730
Messages conservés	30	240	270
Total	750	250	1 000

2. On choisit un message au hasard. Tous les messages ont la même probabilité d'être choisis. On considère les événements suivants :
   - S : « le message est un spam »
   - E : « le message est éliminé »

   On notera respectivement $\overline{S}$ et $\overline{E}$ leurs contraires.

   (a) Donner sans justification $P(S)$ et $P(E)$, $P(S \cap E)$, et $P_S(\overline{E})$.

   $P(S) = \dfrac{750}{1000} = 0,75$; $P(E) = 0,73$; $P(S \cap E) = 0,72$; et $P_S(\overline{E}) = \dfrac{30}{750} = 0,04$.

   (b) S et E sont-ils indépendants ? Justifier.

   S et E sont indépendants ssi $P(E) = P_S(E)$.

   Or, $P(E) = 0,73$, et $P_S(E) = 0,96$ (d'après l'énoncé : 96% des spams sont éliminés).

   $\boxed{\text{Donc } P(E) \neq P_S(E).\ S \text{ et } E \text{ ne sont pas indépendants.}}$

   (c) Le logiciel se trompe s'il conserve un spam ou s'il élimine un message bienvenu.

   Quelle est la probabilité de l'événement A : « le logiciel se trompe » ?

   $\boxed{P(A) = P(S \cap \overline{E}) + P(\overline{S} \cap E) = \dfrac{30}{1000} + \dfrac{10}{1000} = 0,04.}$

Exercice 12 (3 points)
Les questions sont indépendantes.

1. Soit (a_n) la suite définie pour tout entier n par $a_n = \left(2 - \frac{3}{2}n\right)^2$.
   Calculer a_0, a_1 et a_2.
   $a_0 = \left(2 - \frac{3}{2} \times 0\right)^2 = 2^2 = 4$. $a_1 = \left(2 - \frac{3}{2} \times 1\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.
   $a_2 = \left(2 - \frac{3}{2} \times 2\right)^2 = (-1)^2 = 1$.
2. Soit (b_n) la suite définie par $b_0 = 5$ et pout tout $n \geqslant 0$, $b_{n+1} = \frac{4}{3}b_n - 1$.
   Calculer b_1 et b_2.
   $b_1 = \frac{4}{3}b_0 - 1 = \frac{4}{3} \times 5 - \frac{3}{3} = \frac{17}{3}$.
   $b_2 = \frac{4}{3}b_1 - 1 = \frac{4}{3} \times \frac{17}{3} - 1 = \frac{68-9}{9} = \frac{59}{9}$.
3. Soit (c_n) la suite définie par $c_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = n^2 + 3c_n$.
   Calculer c_1 et c_2.
   $c_1 = 0^2 + 3 \times c_0 = 3 \times 3 = 9$.
   $c_2 = 1^2 + 3 \times c_1 = 1 + 3 \times 9 = 28$.

Exercice 13 (1,5 point)
On place un capital de 15 000 euros sur un livret d'épargne rémunéré à 2 % d'intérêts composés. On suppose que l'on retire 700 euros chaque début d'année à partir de la deuxième année.
On pose $C_0 = 15\,000$ et l'on note C_n le capital présent au bout de la n-ième année après le retrait de 700 euros.

1. Calculer C_1, capital au bout d'un an après le retrait de 700 euros.
   Augmenter de 2% revient à multiplier par $c = 1 + 0,02 = 1,02$.
   $C_1 = C_0 \times 1,02 - 700 = 15\,000 \times 1,02 - 700 = 14\,600$.
   $\boxed{\text{Au bout d'un an, on a 14 600 euros sur le livret.}}$
2. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n.
   $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ C_{n+1} = 1,02 \times C_n - 700.}$

Exercice 14 (2,5 points)
On considère la suite (V_n) définie par $V_0 = 30$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = -2V_n + 12$.

1. À l'aide de la calculatrice, donner la valeur de V_{10}.
   $\boxed{V_{10} = 26\,628.}$
2. Écrire une fonction Python d'argument n qui renvoie la valeur de V_n pour tout entier $n \geqslant 0$.

```
def Terme(n) :
    u=30
    for k in range(1,n+1):
        u=-2*u+12
    return(u)
```

Exercice 15 (3 points)

1. La partie restante du terrain est un rectangle de dimensions $(30 - x)$ et $(12 - x)$.
   Son aire a pour expression :
   $(30 - x)(12 - x) = x^2 - 30x - 12x + 30 \times 12 = x^2 - 42x + 360$.
   On souhaite que cette aire soit supérieure à 280.
   D'où l'inéquation :
$$\begin{aligned} x^2 - 42x + 360 &\geqslant 280 \\ x^2 - 42x + 80 &\geqslant 0 \end{aligned}$$
2. On étudie le signe du trinôme $x^2 - 42x + 80$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 42^2 - 4 \times 1 \times 80 = 1444 = 38^2 > 0$.
   Le trinôme a donc deux racines :
   $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{42 - 38}{2} = 2$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{42 + 38}{2} = 40$
   Le trinôme est positif (signe de a, ici $a = 1$) à l'extérieur des racines, et du signe de $-a$ entre les racines.

x	$-\infty$		2		40		$+\infty$
$x^2 - 42x + 80$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Donc $x^2 - 42x + 80 \geqslant 0$ sur $]-\infty; 2] \cup [40; +\infty[$.
   D'après le contexte, la largeur x du chemin est comprise en 0,8 m et 12 m.
   $\boxed{\text{Donc la largeur du chemin doit être entre 0,8 m et 2 m.}}$

Exercice 16 (bonus, 1 point)
Notons $a = 2 - \sqrt{5}$.
Alors, $a^2 = (2 - \sqrt{5})^2 = 4 - 4\sqrt{5} + 5 = 9 - 4\sqrt{5} = 1 + (8 - 4\sqrt{5}) = 1 + 4a$.
Ainsi, $a^2 = 4a + 1$, soit $a^2 - 4a - 1 = 0$.
$\boxed{\text{Donc } a = 2 - \sqrt{5} \text{ est racine du trinôme } x^2 - 4x - 1.}$