1G. Devoir maison n° 5
À rendre pour le mardi 06 janvier 2026

Exercice 1

Calculer l'expression de la dérivée des fonctions suivantes.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^5 + 8x^3 + 2x - 4$.
2. f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = (3 - 2x)\sqrt{x}$.
3. f est définie sur $]3; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{11}{x^2 - 3x}$.
4. f est définie sur $]-9; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5 - x}{x + 9}$.
5. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (5x - 6)^3$.

Exercice 2

Soit f la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$

1. Soit $a \neq 0$. Exprimer en fonction de a l'équation de la tangente T_a à la courbe de f au point d'abscisse a.
2. Soit d la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{9}x + 7$.
   Montrer qu'il existe deux tangentes à la courbe de f qui sont parallèles à la droite d. Pour chacune, donner l'équation réduite et les coordonnées du point de contact avec la courbe de f.

Exercice 3

Le 31 décembre 2019, Sophia a reçu 75 euros d'étrennes, puis chaque année celles-ci augmentent de 8 euros. Pour tout entier naturel n, on note a_n le montant des étrennes reçues le 31 décembre de l'année $(2019+n)$. Ainsi, $a_0 = 75$.

1. Donner les valeurs a_1 et a_2 des étrennes en décembre 2020 et 2021.
2. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n, puis déterminer l'expression de a_n en fonction de n.
3. Quel montant reçoit-elle le 31 décembre 2034 ?
4. Quelle somme totale aura-t-elle reçue le 31 décembre 2034 ?

Exercice 4 (le stand de tir)

Dans un stand de tir, une personne effectue des tirs successifs pour atteindre plusieurs cibles.
La probabilité que la première cible soit atteinte est $\dfrac{1}{2}$. Lorsqu'une cible est atteinte, la probabilité d'atteindre la suivante est $\dfrac{3}{4}$. Lorsqu'une cible n'est pas atteinte, la probabilité d'atteindre la suivante est $\dfrac{1}{2}$.
On note A_n : " La n^{e} cible est atteinte", et $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(\overline{A_n})$.
Remarque : pour tout n$\geqslant 1$, on a $b_n = 1 - a_n$.

1. Donner a_1, b_1, puis déterminer a_2, b_2.
   Indication : pour a_2 et b_2, faire un arbre et appliquer la formule des probabilités totales.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = \dfrac{3}{4}a_n + \dfrac{1}{2}b_n$ puis $a_{n+1} = \dfrac{1}{4}a_n + \dfrac{1}{2}$.
   Indication : procéder comme à la question 1.
3. Écrire le script d'une fonction Python d'argument n qui retourne a_n.
4. On pose $u_n = a_n - \dfrac{2}{3}$ pour tout $n \geqslant 1$.
   (a) Montrer que (u_n) est géométrique, et donner ses éléments caractéristiques.
   (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n (pour tout $n \geqslant 1$), puis celle de a_n.
   (c) Calculer a_{10} arrondi à 10^{-4} et comparer avec le résultat obtenu à l'aide de la fonction Python et avec le mode suite de la calculatrice.