PS. Correction du dm7

Exercice 1

En revenant à la définition du nombre dérivé, montrer que la fonction f définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$ est dérivable en 5, et déterminer $f'(5)$.

Soit $h \neq 0$.

$\dfrac{f(5+h)-f(5)}{h} = \dfrac{1}{h} \times \left(\dfrac{3}{5+h-2} - 1\right) = \dfrac{3-(h+3)}{h(h+3)} = \dfrac{-1}{h+3}$.

Donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(5+h)-f(5)}{h} = -\dfrac{1}{3}$.

$\boxed{\text{Donc } f \text{ est dérivable en 5 et } f'(5) = -\dfrac{1}{3}.}$

Exercice 2

La tangente à la courbe de la fonction carré au point $A(2;4)$ passe-t-elle par le point $K(-1;-8)$?

On pose $f(x) = x^2$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x$.

Soit T cette tangente au point d'abscisse 2.

Elle a pour équation $y = f'(2)(x-2) + f(2) = 4(x-2) + 4 = 4x - 4$.

Donc T a pour équation $y = 4x - 4$.

Or, $4 \times (-1) - 4 = -8$.

$\boxed{\text{Les coordonnées de } K(-1;-8) \text{ vérifient l'équation de la droite : } K \in T.}$

Exercice 3

Partie 1

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 5 \text{ et} \\ \text{pour tout } n \geqslant 0, u_{n+1} = \dfrac{1}{8}(u_n)^2 + u_n - 2 \end{cases}$.

En posant $f(x) = \dfrac{1}{8}x^2 + x - 2$, on a donc $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geqslant 0$.

On a représenté ci-dessous la courbe représentative de la fonction f et la droite d'équation $y = x$.

1. Placer u_0 sur l'axe des abscisses et, en s'aidant du graphique, construire les termes u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.
2. Vérifier par le calcul u_1 et u_2.
   $u_1 = \dfrac{1}{8} \times 5^2 + 5 - 2 = \dfrac{25}{8} + \dfrac{24}{8} = \dfrac{49}{8} = 6,125$.
   $u_2 = \dfrac{1}{8}{u_1}^2 + u_1 - 2 = \dfrac{4531}{512} \approx 8,8145$.
3. Que peut-on conjecturer sur le sens de variation de la suite (u_n) ? sur sa convergence ?
   Il semble que la suite (u_n) soit croissante et qu'elle diverge vers $+\infty$.

Partie 2

On considère maintenant la suite (V_n) définie par $\begin{cases} V_0 = 3 \\ V_{n+1} = f(V_n), \quad n \geqslant 0 \end{cases}$, toujours avec la fonction $f(x) = \dfrac{1}{8}x^2 + x - 2$.

1. Construire de même les premiers termes de la suite (V_n) sur l'axe des abscisses (au moins jusqu'à V_4).
2. Que peut-on conjecturer sur le sens de variation de (V_n) ?
   (V_n) semble décroissante.
3. Que peut-on conjecturer sur sa convergence ?
   Il semble que (V_n) converge vers -4.

4. On admet que (V_n) converge vers l'unique solution négative de l'équation $f(x) = x$. Déterminer la limite de la suite (V_n) par le calcul.

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & x \\ \frac{1}{8}x^2 + x - 2 & = & x \\ \frac{1}{8}x^2 & = & 2 \\ x^2 & = & 16 \\ x = 4 & \text{ou} & x = -4 \end{array}$$

(V_n) converge vers la solution négative de l'équation $f(x) = x$, donc la limite de (V_n) est -4.

5. Écrire un algorithme qui renvoie le plus petit entier n_0 tel que $|V_{n_0} + 4| < 10^{-4}$.

DEBUT
$3 \rightarrow V$
$0 \rightarrow N$
`Tant que` $|V + 4| \geqslant 10^{-4}$
    $N + 1 \rightarrow N$
    $\frac{1}{8}V^2 + V - 2 \rightarrow V$
`Fin Tant que`
`Afficher` N
`Afficher` V (facultatif, pour vérifier $|V_{n_0} + 4|$)
FIN

6. Programmer l'algorithme à la calculatrice et donner la valeur de n_0.
$n_0 = 7$, et $V_7 \approx -3,999\,999\,698$.
$|V_7 + 4| \approx 3,02 \times 10^{-7} < 10^{-4}$.