Correction du dm n° 11

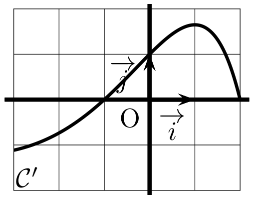
Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$.

On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$.

On dispose des informations suivantes :

- $f(0) = -1$.
- la **dérivée** f' de la fonction f admet la courbe représentative $\mathcal{C}'$ ci -dessous.



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3, -1]$, $f'(x) \leqslant 0$.
   Sur l'intervalle $[-3, -1]$, tous les points de la courbe ont une ordonnée négative ou nulle. L'affirmation est VRAIE.
2. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1\ ;\ 2]$.
   Sur l'intervalle $[-1\ ;\ 2]$, on lit que $f'(x) \geqslant 0$, donc que f est croissante sur cet intervalle. L'affirmation est VRAIE.
3. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$, $f(x) \geqslant -1$.
   Sur l'intervalle $]-1\ ;\ 0]$, on a $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-1\ ;\ 0]$. Or on sait que $f(0) = -1$. D'après la croissance stricte sur l'intervalle tous les réels de cet intervalle ont une image par f inférieure à -1. L'affirmation est FAUSSE.
4. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.
   La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées $(1\,;\,0)$.
   Pour $x = 0$, on lit $f'(0) = 1$ et on sait que $f(0) = -1$.
   Donc la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y - f(0) = f'(0)(x - 0) \iff y - (-1) = 1x \iff y = x - 1$. Cette tangente contient bien le point de coordonnées $(1\,;\,0)$ car ces cordonnées vérifient l'équation de la tangente. L'affirmation est VRAIE

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[1;7]$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{3-4x}$.

1. Justifier que f est dérivable sur $[1;7]$.
   Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto 3 - 4x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
   $3 - 4x = 0$ ssi $x = \dfrac{3}{4}$. Donc $3 - 4x$ ne s'annule pas sur l'intervalle $[1;7]$.
   Par quotient de fonctions dérivables, f est dérivable sur $[1;7]$.
2. Calculer $f'(x)$.
   Pour tout $x \in [1;7]$, $\boxed{f'(x) = \dfrac{2x(3-4x) - x^2 \times (-4)}{(3-4x)^2} = \dfrac{-4x^2+6x}{(3-4x)^2}.}$
3. Déterminer un encadrement de $f(x)$ valable pour tout $x \in [1;7]$.
   On cherche les variations de f sur $[1;7]$, et donc on étudie le signe de $f'(x)$.
   $(3-4x)^2 > 0$ sur $[1;7]$.
   Donc $f'(x)$ est du signe de son numérateur : $-4x^2 + 6x$.
   $-4x^2 + 6x = 2x(-2x+3)$.
   Le trinôme $-4x^2 + 6x$ s'annule donc pour $x = 0$ et $x = \dfrac{3}{2}$.
   Il est négatif (signe de a, $a = -4$) à l'extérieur des racines.
   En se limitant à l'intervalle d'étude $[1;7]$, on a donc :

x	1		3/2		7
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	-0.75	$\searrow$	$-1,96$

$f(1) = \dfrac{1}{3-4} = -1.$ $\qquad f(1,5) = \dfrac{1.5^2}{3 - 4 \times 1,5} = -0,75.$

$f(7) = \dfrac{7^2}{3 - 4 \times 7} = -\dfrac{49}{25} = -1,96.$

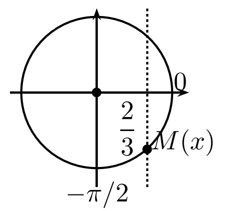
Sur l'intervalle $[1;7]$, le maximum de f est de -0.75, et le minimum de f est de $-1,96$. $\boxed{\text{Pour tout } x \in [1;7],\ -1,96 \leqslant f(x) \leqslant -0,75.}$

Exercice 3

Soit x un réel de $\left[-\dfrac{\pi}{2}; 0\right]$ tel que $\cos x = \dfrac{2}{3}$.

On note M le point du cercle trigonométrique associé au réel x.

1. Faire une figure, placer M.
2. Calculer $\sin x$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
   Donc $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = 1 - \dfrac{4}{9} = \dfrac{5}{9}$.
   D'où $\sin x = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ ou $\sin x = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.
   Comme $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; 0\right]$, $\sin x \leqslant 0$.
   $\boxed{\text{Donc } \sin x = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}.}$

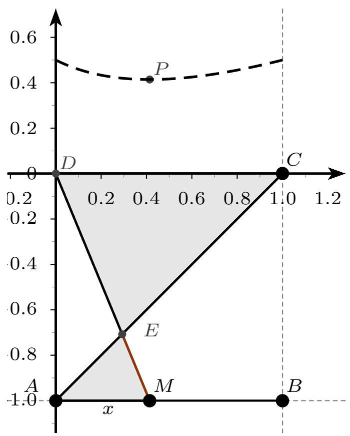


3. Calculer $\sin(\pi - x)$, $\cos(\pi - x)$, $\cos(\frac{\pi}{2} - x)$, $\sin(\frac{3\pi}{2} + x)$.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \sin(\pi - x) = \sin x = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}. & \cos(\pi - x) = -\cos x = -\dfrac{2}{3}. \\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}. & \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x = \dfrac{2}{3}. \end{array}}$$

Exercice 4
On considère un carré $ABCD$ de côté 1 et M un point mobile sur le segment $[AB]$. Les droites (DM) et (AC) se coupent en un point E. Le but du problème est de déterminer l'aire colorée minimale, ainsi que la ou les positions du point M rendant cette aire minimale.

Étude expérimentale



Il semble que $\mathcal{A}$ soit minimale pour $AM \approx 0,41$ et que l'aire $\mathcal{A}$ minimale soit environ $0,41$.

Étude algébrique

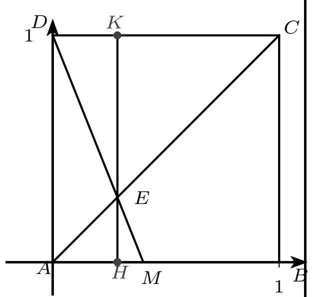
On pose $AM = x$ et on note H et K les pieds des hauteurs issues de E dans les triangles EAM et ECD.

1. À quel intervalle appartient x ?

   Comme $M \in [AB]$ et que $AB = 1$, on a $x \in [0;1]$.

2. Démontrer que $EH = \dfrac{x}{x+1}$ et $EK = \dfrac{1}{x+1}$.

   Si $M = A$, alors $H = E = A$, et $K = D$, et l'on a $EH = 0$, et $EK = 1$, ce qui convient avec les expressions $\dfrac{x}{x+1}$ et $\dfrac{1}{x+1}$ lorsque $x = 0$.
   Désormais, on suppose que M est distinct de A. Dans le triange ADM, les droites (EH) et (AD) sont parallèles.
   D'après le théorème de Thalès, $\dfrac{MH}{MA} = \dfrac{EH}{AD}$.



   Or, le triangle AHE est rectangle isocèle en H, et l'on a donc $HA = HE$.
   En notant $a = EH$ la longueur que l'on cherche à exprimer, on cela donne $\dfrac{x-a}{x} = \dfrac{a}{1}$.
   On va isoler $EH = a$ dans cette dernière relation.
   Par produit en croix, $ax = x - a$ puis $a(1+x) = x$, et enfin $a = \dfrac{x}{1+x}$.

   On a donc $EH = \dfrac{x}{1+x}$. Comme $EH + EK = 1$, $EK = 1 - EH = \dfrac{1}{1+x}$.

3. En déduire qu'une expression de l'aire colorée est $\mathcal{A}(x) = \dfrac{x^2+1}{2(x+1)}$.

   $Aire(AME) = \dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \dfrac{AM \times EH}{2} = \dfrac{1}{2} \times x \times \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{x^2}{2(x+1)}$.
   $Aire(CDE) = \dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \dfrac{CD \times EK}{2} = \dfrac{1}{2} \times 1 \times \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{2(x+1)}$.

   Ainsi, $\mathcal{A}(x) = \dfrac{x^2}{2(x+1)} + \dfrac{1}{2(x+1)} = \dfrac{x^2+1}{2(x+1)}$.

4. Démontrer la conjecture du 1.
   $x + 1 = 0$ ssi $x = -1$. Donc $x + 1$ ne s'annule pas sur $[0;1]$.
   Par quotient de fonctions dérivables, $\mathcal{A}$ est dérivable sur $[0;1]$.
   Pour tout $x \in [0;1]$,
   $\mathcal{A}'(x) = \dfrac{2x(2x+2) - (x^2+1) \times 2}{4(x+1)^2} = \dfrac{2x^2+4x-2}{4(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x-1}{2(x+1)^2}$.
   Un carré est toujours positif, et $x + 1$ ne s'annule pas sur $[0;1]$, donc pour tout $x \in [0;1]$, $2(x+1)^2 > 0$.
   Donc $\mathcal{A}'(x)$ est du signe de $x^2 + 2x - 1$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 4 + 4 = 8 > 0$.
   $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2-2\sqrt{2}}{2} = -1-\sqrt{2} \approx -2,41$.
   $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2+2\sqrt{2}}{2} = -1+\sqrt{2} \approx 0,41$.
   Le trinôme est positif (signe de a) à l'extérieur des racines.

x	0		$\sqrt{2}-1$		1
$\mathcal{A}'(x)$		$-$	0	$+$	
$\mathcal{A}(x)$	$1/2$	$\searrow$	$\mathcal{A}(\sqrt{2}-1)$	$\nearrow$	$1/2$

   $\mathcal{A}(\sqrt{2}-1) = \dfrac{(\sqrt{2}-1)^2+1}{2(\sqrt{2}-1+1)} = \dfrac{3-2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$.

   Donc l'aire étudiée est minimale pour $AM = \sqrt{2}-1 \approx 0,4142$ et l'aire minimale est $\sqrt{2}-1 \approx 0,4142$.