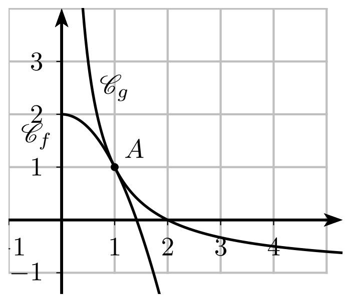
**PS. Correction du contrôle n° 3**

**Exercice 1 (2 points)**
Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

1. Pour tout $x > 8$, $g(x) = \dfrac{1}{16-2x}$.
   $\boxed{g'(x) = \dfrac{-(-2)}{(16-2x)^2} = \dfrac{2}{(16-2x)^2}.}$
2. Pour tout $x \in \left]\dfrac{5}{2};+\infty\right[$, $h(x) = \dfrac{x^3}{2x-5}$.
   $\boxed{h'(x) = \dfrac{3x^2(2x-5) - x^3 \times 2}{(2x-5)^2} = \dfrac{4x^3-15x^2}{(2x-5)^2}.}$

**Exercice 2 (2 points)**
On donne ci-dessous la représentation graphique des fonctions $f$ et $g$ définies sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2 - x^2$ et $g(x) = \dfrac{2}{x} - 1$.
Il semble qu'elles admettent au point $A(1;1)$ une tangente commune. Qu'en est-il ? Justifier.




$f(1) = 2 - 1^2 = 1$, et $g(1) = \dfrac{2}{1} - 1 = 2 - 1 = 1$.
$\boxed{\text{Donc } \mathscr{C}_f \text{ et } \mathscr{C}_g \text{ passent bien par le point } A(1;1).}$
$f$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ car c'est une fonction polynôme.
Pour tout $x > 0$, $f'(x) = -2x$, donc $f'(1) = -2$.
$g$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ (toute fonction fraction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition).
Pour tout $x > 0$, $g'(x) = \dfrac{-2}{x^2}$, et donc $g'(1) = -2$.
$\boxed{f'(1) = g'(1) = -2.}$
Les courbes de $f$ et $g$ ont le point $A(1\,;1)$ en commun et en ce point leur tangente a pour coefficient directeur $-2$.
$\boxed{\text{Oui } \mathscr{C}_f \text{ et } \mathscr{C}_g \text{ ont une tangente commune en } A.}$
Remarque : c'est la droite d'équation $y = -2x + 3$.

**Exercice 3 (5 points)**
Soit $f$ la fonction dérivable définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x + 1$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Calculer la dérivée $f'(x)$ de $f$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Comme toute fonction polynôme, $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   $\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -2x + 4.}$
2. Montrer que la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est la droite d'équation $y = 2x + 2$.

   La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.
   $f'(1) = -2 + 4 = 2$, et $f(1) = -1 + 4 + 1 = 4$.
   $$\begin{aligned} y &= f'(1)(x-1) + f(1) \\ &= 2(x-1) + 4 \\ &= 2x + 2 \end{aligned}$$
   $\boxed{\text{La tangente à } \mathscr{C} \text{ au point d'abscisse 1 a bien pour équation } y = 2x + 2.}$
3. Pour tout nombre réel $a$, on note $T_a$ la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $a$.

(a) Déterminer $a$ pour que $T_a$ soit parallèle à la droite $(d)$ d'équation

$$y = -4x + 1.$$

Les droites $T_a$ et $(d)$ sont parallèles ssi elles ont le même coefficient directeur, ce qui revient à $f'(a) = -4$. D'où $-2a + 4 = -4$, $-2a = -8$, et $a = 4$.

$\boxed{\text{Il y a une unique tangente parallèle à } (d)\text{, c'est la tangente au point d'abscisse 4.}}$

(b) Justifier que pour tout $a \in \mathbb{R}$, la tangente $T_a$ a pour équation

$$y = (-2a + 4)x + a^2 + 1.$$

Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} y &=& f'(a)(x-a) + f(a) \\ y &=& (-2a+4)(x-a) + (-a^2+4a+1) \\ y &=& (-2a+4)x + 2a^2 - 4a - a^2 + 4a + 1 \\ y &=& (-2a+4)x + a^2 + 1 \end{array}$$

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $T_a$ a pour équation $y = (-2a+4)x + a^2 + 1$.

(c) En déduire qu'il existe 2 tangentes à $\mathscr{C}$ passant par le point $K(3; 8)$.
$K(3; 8) \in T_a$ ssi $8 = (-2a+4) \times 3 + a^2 + 1$, soit $a^2 - 6a + 5 = 0$.
C'est un équation du second degré avec pour inconnue $a$.
$\Delta = "b^2 - 4ac" = 36 - 4 \times 5 = 16 > 0$.
Il y a 2 solutions.
$a_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6-4}{2} = 1$.
$a_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6+4}{2} = 5$.

$\boxed{\text{Il y a 2 tangentes à } \mathscr{C} \text{ qui passent par le point } K(3;8)\text{, ce sont } T_1 \text{ et } T_5.}$

(d) Complément.
Pour chacune de ces tangentes, donner une équation et les coordonnées du point de contact avec la courbe.

— Pour la tangente $T_1$ au point d'abscisse 1, $f(1) = -1+4+1 = 4$. $\boxed{\text{Le point de contact entre } \mathscr{C} \text{ et } T_1 \text{ est } A(1;4).}$

  $\boxed{\text{On a déjà vu à la question 2 que } T_1 \text{ a pour équation } y = 2x+2.}$

— Pour la tangente $T_5$ au point d'abscisse 5, $f(5) = -5^2 + 5 \times 5 + 1 = -25 + 20 + 1 = -4$.

  $\boxed{\text{Le point de contact est } B(5;-4).}$

  En remplaçant $a$ par 5 dans l'équation de $T_a$, il vient $y = (-2 \times 5 + 4)x + 5^2 + 1 = -6x + 26$.

  $\boxed{T_5 \text{ a pour équation } y = -6x+26.}$

**Exercice 4 (5 points)**

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = u_n - \dfrac{1}{(u_n)^2 + 1}$.

1. Calculer $u_1$.

   $\boxed{u_1 = u_0 - \dfrac{1}{u_0^2 + 1} = 2 - \dfrac{1}{2^2+1} = \dfrac{9}{5} = 1,8.}$

2. Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)$.

   Pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_{n+1} - u_n = u_n - \dfrac{1}{(u_n)^2+1} - u_n = -\dfrac{1}{(u_n)^2+1} < 0$ (car $(u_n)^2 + 1 > 0$).

   $\boxed{\text{Donc } (u_n) \text{ est décroissante.}}$

3. Par une méthode de votre choix, donner la valeur de $u_{100}$ arrondie à $10^{-4}$ près. Expliquer la démarche.
   On utilise l'algorithme suivant :

   ```
   DÉBUT
   Entrer N
   U prend la valeur 2
   Pour K allant de 1 à N
   U prend la valeur U − 1/(U² + 1)
   Fin Pour
   Afficher U
   FIN
   ```

$\boxed{u_{100} \approx -6,4647.}$

4. Donner le plus petit entier $p$ tel que $u_p < -6$. Expliquer la démarche.
On utilise un algorithme de seuil.

```
DÉBUT
N prend la valeur 0
U prend la valeur 2
Tant que U ⩾ −6
        N prend la valeur N + 1
        U prend la valeur U − 1/(U² + 1)
Fin Tant que
Afficher N
FIN
```

$\boxed{\text{On trouve } p = 82.}$

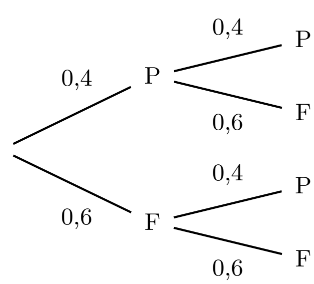
5. Peut-on affirmer que pour tout $n \geqslant p$, $u_n < -6$ ? Justifier.
Comme $u_{82} < -6$ et $(u_n)$ est décroissante, pour tout $n \geqslant 82$, $u_n \leqslant u_{82} < -6$.

Oui, on peut affirmer que $u_n$ est strictement inférieur à $-6$ pour tout entier $n$ à partir de 82.

**Exercice 5 (5 points)**

On lance deux fois de suite une pièce déséquilibrée à Pile ou Face. À chaque lancer, la probabilité de faire Pile est de 0,4.
On appelle $X$ la variable aléatoire donnant le nombre de Pile obtenu(s) après deux lancers de la pièce.

1. Représenter l'expérience par un arbre de probabilités.
On note les événements :
— P : « obtenir Pile » ;
— F : « obtenir Face ».




2. (a) Montrer que $P(X = 1) = 0,48$.

$\boxed{P(X = 1) = 2 \times 0,4 \times 0,6 = 0,48}$

(b) Déterminer la loi de probabilité de $X$.

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | 0,36 | 0,48 | 0,16 |

(c) Calculer en détaillant $E(X)$.

$\boxed{E(X) = 0 \times 0,36 + 1 \times 0,48 + 2 \times 0,16 = 0,8}$

(d) Donner sans justification la valeur exacte de $V(X)$.
À l'aide de la calculatrice :

$\boxed{V(X) = 1,12 - 0,8^2 = 0,48}$

3. On propose le jeu suivant :
La mise est de 10 euros et l'on récupère un montant proportionnel au nombre de Pile obtenu(s).

(a) *Dans cette question seulement,* on récupère 12 euros par pile obtenu.
Par exemple, si la pièce tombe deux fois sur Pile, le joueur récupère $2 \times 12 = 24$ euros. Il gagne donc au final 14 euros.
Ce jeu est-il intéressant pour le joueur ?

On note $G$ la variable aléatoire qui à chaque situation associe le gain net du joueur. On a alors :
$G = 12X - 10$ et $E(G) = E(12X - 10) = 12E(X) - 10 = -0,4$.
Comme $E(G) < 0$, ce jeu n'est pas intéressant pour le participant.

(b) Quel devrait-être le montant récupéré par le joueur pour chaque Pile obtenu pour que le jeu soit équitable ?

On note $m$ le montant récupéré par Pile obtenu. Alors :
$G = mX - 10$ et $E(G) = E(mX - 10) = 0,8m - 10$.
Le jeu est équitable si et seulement si :
$E(G) = 0 \iff 0,8m - 10 = 0 \iff m = 12,5$
Il faudrait alors gagner 12,5 € par Pile obtenu.

*Le candidant pourra traiter, au choix, un seul des deux exercices suivants en bonus.*

**Exercice 6 (bonus, 3 points)**
On considère la variable aléatoire $X$ dont la loi de probabilité est indiquée ci-dessous :

| $x_i$ | 7 | 22 | 27 | 77 |
|---|---|---|---|---|
| $p(X = x_i)$ | 0,3 | 0,2 | $a$ | |

1. En justifiant la démarche, trouver la valeur de $a$ telle que $E(X) = 40$.
   On admet que la variance est alors $V(X) = 956$.

   On a $P(X = 77) = 0,5 - a$. D'où :
   $E(X) = 7 \times 0,3 + 22 \times 0,2 + 27 \times a + 77 \times (0,5 - a) = 45 - 50a$.
   $E(X) = 40 \iff 45 - 50a = 40 \iff a = 0,1$. Dans ce cas :

   | $x_i$ | 7 | 22 | 27 | 77 |
   |---|---|---|---|---|
   | $p(X = x_i)$ | 0,3 | 0,2 | 0,1 | 0,4 |

   Après calcul, on a bien $V(X) = 956$.

2. Recopier et compléter la loi de probabilité d'une variable $Y$ vérifiant à la fois $V(Y) = 3824$ et $E(Y) = 0$.

   | $y_i$ | | | | |
   |---|---|---|---|---|
   | $p(Y = y_i)$ | 0,3 | 0,2 | | |

   Indication : $956 \times 4 = 3824$.

   Cherchons $a$ et $b$ réels tels que $Y = aX + b$.
   Alors : $V(Y) = V(aX + b) = a^2V(X) = 956a^2$.
   $V(Y) = 3824 \iff 956a^2 = 3824 \iff a^2 = 4 \iff a = 2$ ou $a = -2$
   On choisit par exemple $a = 2$.
   Dans ce cas, $E(Y) = E(2X + b) = 2E(X) + b = 80 + b$.
   $E(Y) = 0 \iff 80 + b = 0 \iff b = -80$.
   Il suffit alors de choisir $a = 2$ et $b = -80$ pour que la variable aléatoire $Y$ ainsi définie vérifie bien les hypothèses de l'énoncé. On obtient les valeurs de $Y$ en calculant $2x_i - 80$ pour chaque valeur $x_i$ de $X$. On obtient alors :

   | $y_i$ | $-66$ | $-36$ | $-26$ | 74 |
   |---|---|---|---|---|
   | $p(Y = y_i)$ | 0,3 | 0,2 | 0,1 | 0,4 |

   Nous aurions également pu choisir $a = -2$ et $b = 80$ :

   | $y_i$ | 66 | 36 | 26 | $-74$ |
   |---|---|---|---|---|
   | $p(Y = y_i)$ | 0,3 | 0,2 | 0,1 | 0,4 |

**Exercice 7 (bonus, 3 points)**
On considère la fonction $f$ définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x}$.

1. Justifier que $f$ est dérivable sur l'intervalle ouvert $]0; +\infty[$ et calculer $f'(x)$.

   La fonction $f$ est le produit de deux fonctions définies et dérivables sur $]0\,;+\infty[$. Alors $f$ est-elle même dérivable sur cet intervalle ouvert et on a :
   $f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

2. Étude de la dérivabilité en 0.
   (a) Soit $h > 0$. Exprimer le taux d'accroissement de $f$ entre 0 et $0 + h$.

   On pose : $T_0(h) = \dfrac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \dfrac{h\sqrt{h} - 0}{h} = \sqrt{h}$.

   (b) $f$ est-elle dérivable en 0 ? Si oui, déterminer $f'(0)$.

   La quantité $T_0(h) = \sqrt{h}$ tend vers 0 lorsque $h$ tend vers 0. On peut donc écrire :

   $$\lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = 0$$

   Cela signifie que $f$ est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.