Chapitre 7 : Applications de la dérivation

I Dérivée et sens de variation

Théorème (fondamental, admis)
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. f est croissante sur I si et seulement si f' est positive sur I.
2. f est décroissante sur I si et seulement si f' est négative sur I.
3. f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur I.

Remarque
Le signe de la dérivée détermine les variations de la fonction.

Exercice 1
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 6x + 1$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de f' et en déduire les variations de f.

Exercice 2
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1; 10]$ par $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 1$.

1. Déterminer la dérivée $f'(x)$ de f.
2. Étudier le signe de f' et en déduire le tableau de variation de f.

II Extrema d'une fonction

Définition (extremum global)
Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.
f admet un maximum global en a si pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant f(a)$.
f admet un minimum global en a si pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant f(a)$.

Définition (extremum local)
Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.
On dit que f admet un maximum local en a s'il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que, pour tout x de $J \cap I$, on ait $f(x) \leqslant f(a)$.

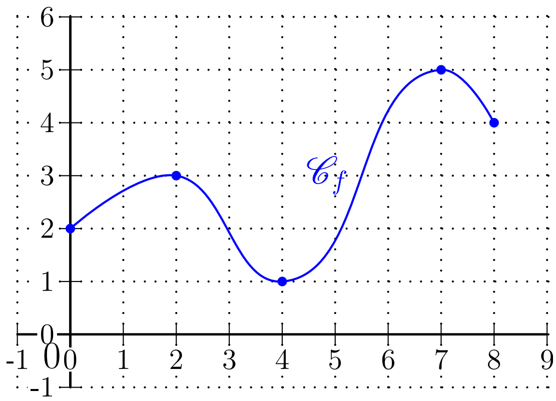
Remarque

1. On définit de façon analogue un minimum local en a.
2. Un extremum est un maximum ou un minimum.

3. Tout extremum global est aussi un extremum local.

Exercice 3

On donne la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[0;8]$.
Compléter :



1. f admet un maximum global en .... Ce maximum global est ...
2. f admet un minimum global en .... Ce minimum global est ...
3. f admet aussi un maximum local en ... qui est ...
4. Enfin, f admet des minima locaux en ... et en ... qui sont respectivement ... et ...

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, et soit a un réel de I distinct des extrémités.
Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.
Rappel : $f'(a) = 0$ signifie que la tangente en a à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à l'axe des abscisses.

Remarque

1. La dérivabilité n'est pas nécessaire pour avoir un extremum.
   Par exemple, la fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0 et admet un minimum (global) en 0.
2. La réciproque du théorème est fausse.
   Considérons $f(x) = x^3$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$.
   On a $f'(0) = 0$ et pourtant f n'a pas d'extremum local en 0.
3. Si la dérivée de f s'annule en a en changeant de signe, alors f admet un extremum local en c.

Exercice 4

Rechercher les extrema de la fonction f définie sur $[-1;2]$ par
$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$.

Exercice 5

Déterminer le meilleur encadrement de $f(x) = -2x^2 + 4x + 3$ sur $[-3;4]$.

III Compléments

III.1 Variante du théorème fondamental

Théorème
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. Si $f' > 0$ sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de réels où f' s'annule, alors f est strictement croissante sur I.
2. Si $f' < 0$ sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de réels où f' s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.

Remarque

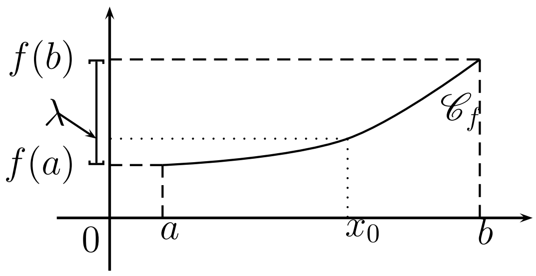
1. Considérons la fonction cube, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$.
   Il est clair que $f' > 0$ sur $\mathbb{R}$ sauf en 0 où $f'(0) = 0$.
   Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. L'hypothèse I est un intervalle est indispensable.
   $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

III.2 Équation $f(x) = \lambda$

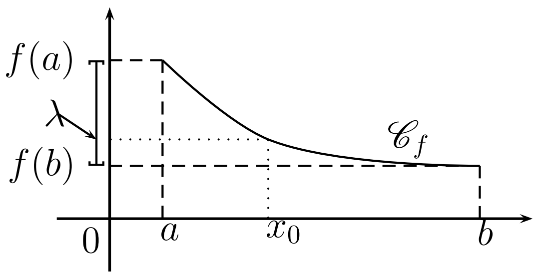
Remarque (courbe représentative d'une fonction dérivable)
Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I, alors,

— f est continue, c'est-à-dire que la courbe de f peut être tracée sans lever le crayon, il n'y a pas de « saut »,
— la courbe de f admet des tangentes en chacun de ses points, et ces tangentes ne sont pas des droites verticales : leur coefficient directeur est un nombre réel (contre-exemple : $x \mapsto \sqrt{x}$ en 0, où la tangente est verticale),
— la courbe de f est régulière, c'est-à-dire qu'elle ne fait pas d'angle vif (contre-exemple : $x \mapsto |x|$ en 0).

Théorème
Si f est dérivable sur $[a;b]$ et si pour tout $x \in]a;b[$ $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur $[a;b]$ et pour tout $\lambda \in [f(a);f(b)]$, l'équation $f(x) = \lambda$ admet une unique solution x_0 dans $[a;b]$.



Théorème
Si f est dérivable sur $[a;b]$ et si pour tout $x \in]a;b[$ $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur $[a;b]$ et pour tout $\lambda \in [f(b);f(a)]$, l'équation $f(x) = \lambda$ admet une unique solution x_0 dans $[a;b]$.



Application : Lorsqu'on est dans les hypothèses de l'un des théorèmes précédents avec $f(a)$ et $f(b)$ de signes contraires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[a;b]$.

Exercice 6
On cherche à étudier l'équation $x^3 + 3x - 7 = 0$.
Notons $f(x) = x^3 + 3x - 7$.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. En considérant $f(1)$ et $f(2)$, montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$, et que $\alpha \in [1;2]$.
3. Utiliser le tableur de la calculatrice pour déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}.

Exercice 7 (corrigé)
On cherche à étudier l'équation $x^3 + 3x - 7 = 0$.
Notons $f(x) = x^3 + 3x - 7$.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$.
   On en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. En considérant $f(1)$ et $f(2)$, montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$, et que $\alpha \in [1; 2]$.
   On remarque que $f(1) = -3$ et $f(2) = 7$.
   D'après le théorème précédent, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans $[1; 2]$, et d'après l'étude des variations de f, elle n'en a aucune dans $]-\infty; 1[$, ni dans $]2; +\infty[$.
   En conclusion, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et α se trouve dans $[1; 2]$.
3. Utiliser le tableur de la calculatrice pour déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}.
   Après quelques manipulations, on obtient sur la calculatrice le tableau de valeurs suivant :

x	y_1
1.405	-0.0115
1.406	-0.0026
1.407	0.00637
1.408	0.01531

   On en déduit que $1,406 < \alpha < 1,407$.