Terminale STL. Correction du DM4 de spécialité

Exercice 1 (36 p 258)

Résoudre les équation différentielles dont t est la variable et y la fonction inconnue.

1. $y' = -3,2 \times 10^{-7}y + 6,56 \times 10^{-6}$ avec $y(0) = 50$.
   $a = -3,2 \times 10^{-7}$, et $b = 6,56 \times 10^{-6}$.
   Les solutions sont les fonctions de la forme :
   $f(t) = k\mathrm{e}^{-3,2\times10^{-7}t} - \dfrac{6,56 \times 10^{-6}}{-3,2 \times 10^{-7}} = k\mathrm{e}^{-3,2\times10^{-7}t} + 20,5$.
   Avec la condition initiale, $f(0) = 50$.
   Donc $k\mathrm{e}^0 + 20,5 = 50$, soit $k = 50 - 20,5 = 29,5$.
   $\boxed{\text{La solution est la fonction } f \text{ définie sur } \mathbb{R} \text{ par } f(t) = 29,5\mathrm{e}^{-3,2\times10^{-7}t} + 20,5.}$
2. $625T' = -1,5T + 7,5$, et $T(0) = 400$.
   On commence par isoler T'.
   $T' = \dfrac{-1,5}{625}T + \dfrac{7,5}{625} = -0,0024T + 0,012$. $a = -0,0024$ et $b = 0,012$.
   Les solutions sont les fonctions de la forme :
   $f(t) = k\mathrm{e}^{-0,0024t} - \dfrac{0,012}{-0,0024} = k\mathrm{e}^{-0,0024t} + 5$.
   Avec la condition initiale, $f(0) = 400$.
   Donc $k\mathrm{e}^0 + 5 = 400$, soit $k = 400 - 5 = 395$.
   $\boxed{\text{La solution est la fonction } f \text{ définie sur } \mathbb{R} \text{ par } f(t) = 395\mathrm{e}^{-0,0024t} + 5.}$
3. $y' = -(y - 8)$ avec $y(0) = 100$.
   $y' = -y + 8$. Donc $a = -1$ et $b = 8$.
   Les solutions sont les fonctions de la forme $f(t) = k\mathrm{e}^{-t} - \dfrac{8}{-1} = k\mathrm{e}^{-t} + 8$.
   Avec la condition initiale, $f(0) = 100$.
   Donc $k\mathrm{e}^0 + 8 = 100$, soit $k = 100 - 8 = 92$.
   $\boxed{\text{La solution est la fonction } f \text{ définie sur } \mathbb{R} \text{ par } f(t) = 92\mathrm{e}^{-t} + 8.}$

Exercice 2 (44 p 260)

Déterminer quelles fonctions sont solutions de $y' + y = 4x$ parmi les trois fonctions proposées :
$f(x) = 2\mathrm{e}^{-x} + 4x + 4$; $g(x) = 2\mathrm{e}^{-2x} - 4x - 4$; et $h(x) = 2\mathrm{e}^{-x} + 4x - 4$.
On teste chaque fonction "candidate".

1. $f'(x) = -2\mathrm{e}^{-x} + 4$.
   Donc $f'(x) + f(x) = -2\mathrm{e}^{-x} + 4 + 2\mathrm{e}^{-x} + 4x + 4 = 4x + 8 \neq 4x$.
   La fonction f n'est pas solution de cette équation différentielle.
2. $g'(x) = -4\mathrm{e}^{-2x} - 4$.
   $g'(x) + g(x) = -4\mathrm{e}^{-2x} - 4 + 2\mathrm{e}^{-2x} - 4x - 4 = -2\mathrm{e}^{-2x} - 4x - 8 \neq 4x$.
   La fonction g n'est pas solution de cette équation différentielle.
3. $h'(x) = -2\mathrm{e}^{-x} + 4$
   $h'(x) + h(x) = -2\mathrm{e}^{-x} + 4 + 2\mathrm{e}^{-x} + 4x - 4 = 4x$.
   $\boxed{\text{Donc } h \text{ est solution de l'équation, et c'est la seule parmi les trois proposées.}}$