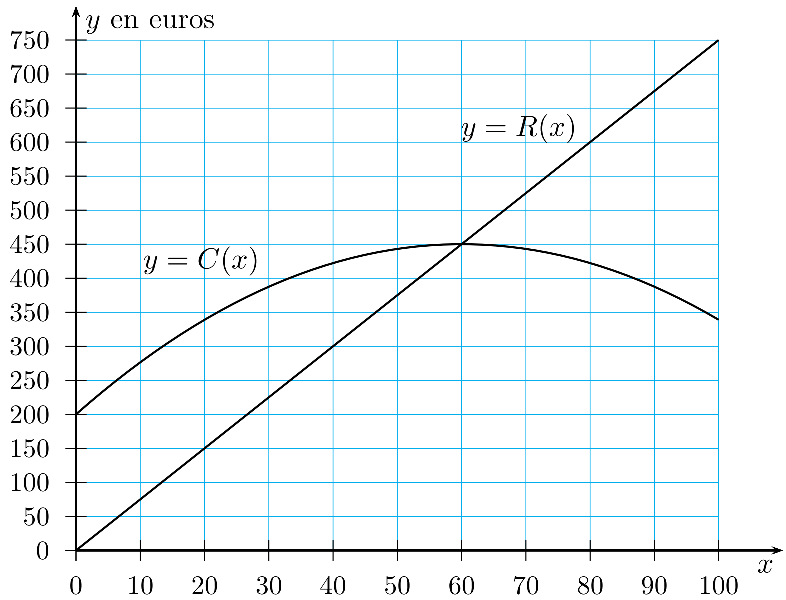
Chapitre 6 : Courbe représentative d'une fonction
Résolutions graphiques

I Introduction

Une entreprise veut lancer sur le marché un nouveau modèle de T-shirts.
Pour un essai sur un mois, elle peut produire jusqu'à 100 exemplaires.
Pour x exemplaires produits et vendus, on note respectivement $C(x)$ et $R(x)$ le coût et la recette exprimés en euros.
Le graphique ci-dessous montre la courbe de la fonction C et de la fonction R qui sont donc définies sur $[0; 100]$.



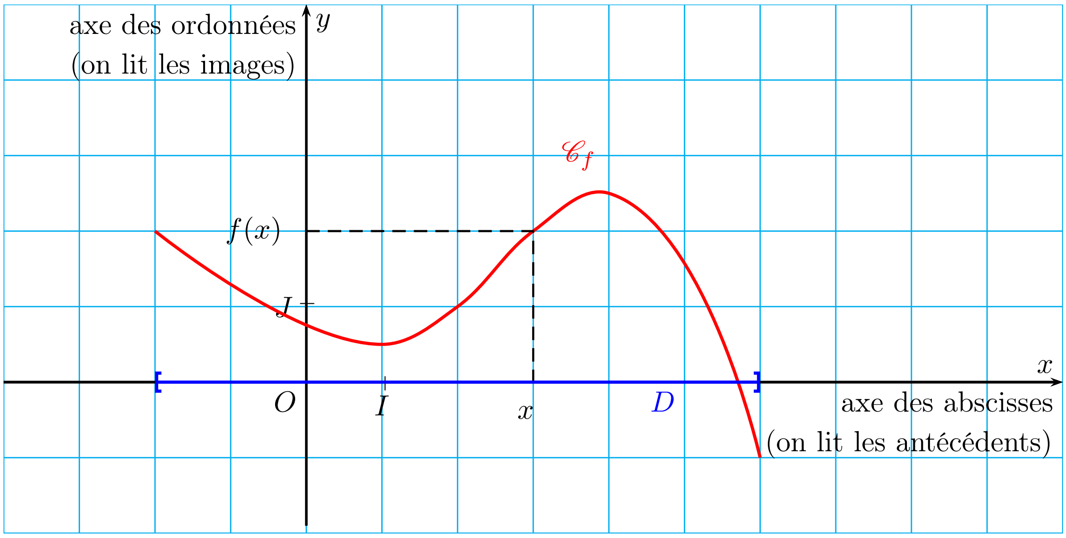
1. Lire graphiquement $C(0)$. Que représente cette valeur ?
2. Lire graphiquement $R(80)$, puis interpréter le résultat.
3. Pour quelle(s) production(s) les coûts sont-ils de 400 euros ?
4. Pour quel nombre de T-shirts produits le coût est-il maximal ? Quel est ce coût maximal ?
5. Pour quelles quantités vendues l'entreprise fait-elle des bénéfices ? Justifier.
6. Combien de T-shirts l'entreprise doit-elle vendre pour réaliser le meilleur bénéfice ? Quel est alors (approximativement) ce bénéfice ?

II Courbe représentative d'une fonction

II.1 Représentation graphique d'une fonction

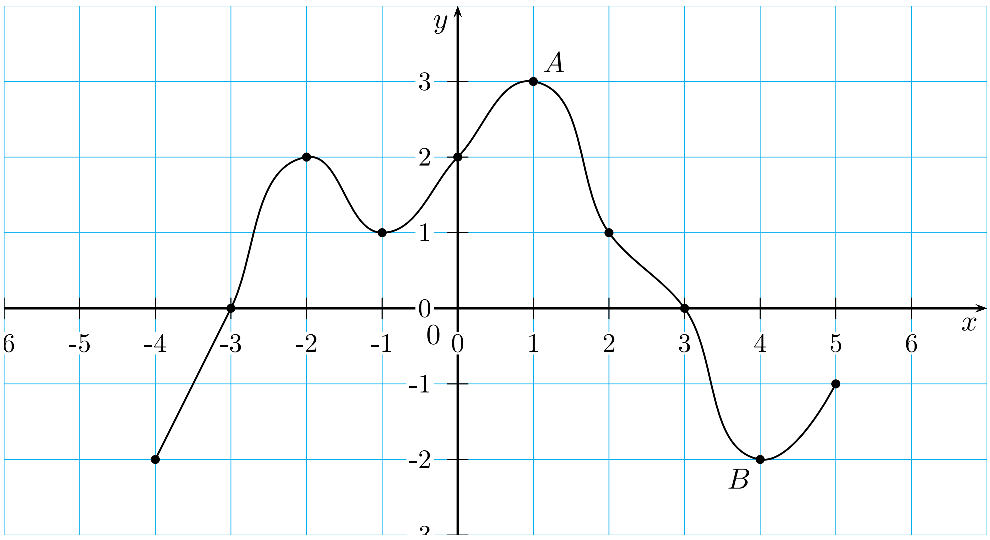
Pour étudier une fonction f, il est intéressant de pouvoir lire à la fois le nombre de départ x et son image $f(x)$.

Définition
Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$.
Dans un repère du plan, la courbe représentative de f est l'ensemble des points $M(x; f(x))$ avec $x \in D_f$.
Autrement dit, $M(x;y) \in \mathscr{C}_f$ si et seulement si $\big(x \in D$ et $y = f(x)\big)$.
On dit que $\mathscr{C}_f$ a pour équation $y = f(x)$.



Sur cet exemple, l'ensemble de définition de f est $D = [-2; 6]$.

Exercice 1
On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-4; 5]$.



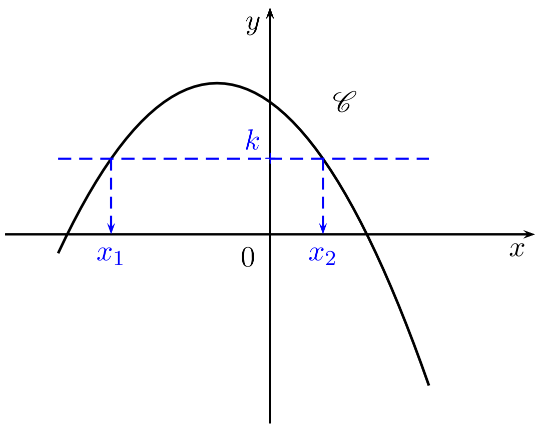
1. On remarque que la courbe passe par le point $A(\ldots;\ldots)$.
   On en déduit que ...
2. De même, la courbe de f passe par le point $B(\ldots;\ldots)$.
   On a donc ....
3. Compléter les images par lecture graphique.
   $f(-4) = \ldots$ $\qquad f(0) = \ldots$ $\qquad f(2) = \ldots$ $\qquad f(3) = \ldots.$

4. Le nombre 5 est-il un antécédent de -1 par f ? Justifier.
   ....
5. Quel est le nombre d'antécédents de -1 par f ?
   ....
6. Compléter (il y a plusieurs bonnes réponses possibles) :
   Le nombre ... a deux antécédents par f.
   Le nombre ... a quatre antécédents par f.
   Le nombre ... n'a pas d'antécédent par f.

III Comparaison d'une fonction avec une constante

III.1 Équation $f(x) = k$

Propriété
Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$.
Notons $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.
Soit k un nombre réel.
Les solutions de l'équation $f(x) = k$ sont les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}$ qui ont une ordonnée égale à k.

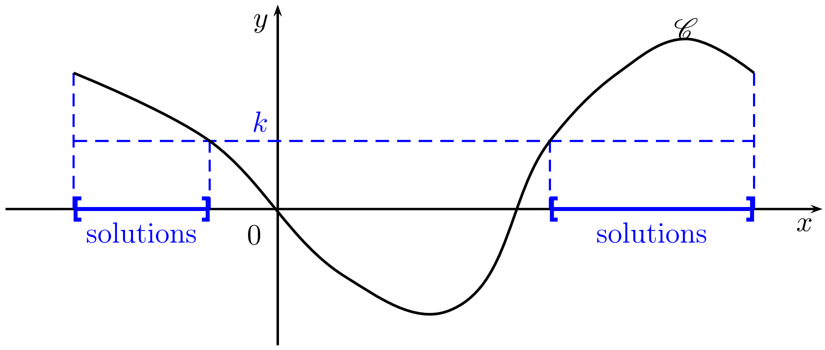


Remarque
Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = k$ revient à déterminer graphiquement les antécédents de k par f.

III.2 Inéquation $f(x) \geqslant k$

Propriété
Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$.
Notons $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.
Soit k un nombre réel.
Les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant k$ (resp. $f(x) > k$) sont les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}$ qui ont une ordonnée supérieure ou égale à k (resp. strictement supérieure à k).

Illustration pour $f(x) \geqslant k$

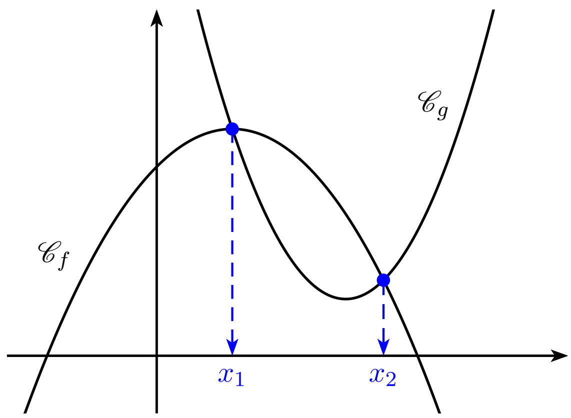


Remarque
On a des énoncés analogues pour les inéquations $f(x) \leqslant k$ et $f(x) < k$.
L'ensemble solution peut être une réunion d'intervalles.

IV Comparaison de deux fonctions

IV.1 Équation $f(x) = g(x)$

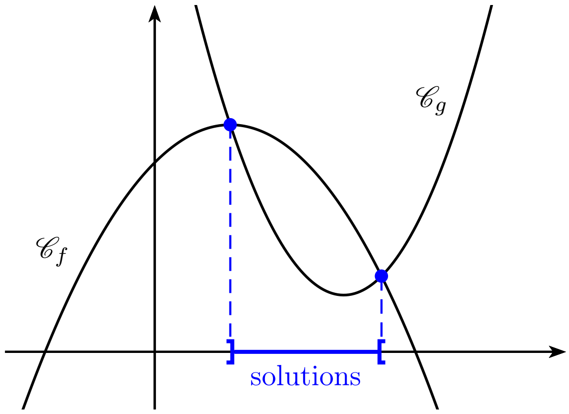
Propriété
Soient f et g deux fonctions définies sur une partie D de $\mathbb{R}$.
Notons respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère du plan.
Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.



IV.2 Inéquation $f(x) > g(x)$

Propriété
Soient f et g deux fonctions définies sur une partie D de $\mathbb{R}$.
Notons respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère du plan.
Les solutions de l'inéquation $f(x) > g(x)$ sont les abscisses des points où $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de $\mathscr{C}_g$.

Illustration pour l'inéquation $f(x) > g(x)$.



Remarque
Pour l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$, on inclut les abscisses des points d'intersection dans les solutions.

V Fonction paire. Fonction impaire

V.0.a Fonction paire

Définition
Soit f une fonction définie sur un domaine D symétrique par rapport 0 (si $x \in D$, alors $-x \in D$).
On dit que f est paire lorsque pour tout $x \in D$, $f(-x) = f(x)$.
La courbe représentative de f est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

V.0.b Fonction impaire

Définition
Soit f une fonction définie sur un domaine D symétrique par rapport 0 (si $x \in D$, alors $-x \in D$).
On dit que f est impaire lorsque pour tout $x \in D$, $f(-x) = -f(x)$.
La courbe représentative de f est alors symétrique par rapport à l'origine du repère (le point O).

Remarque

1. Les fonctions du type x^2, x^4, x^n avec n entier pair sont des fonctions paires.
2. Les fonctions du type x^3, x^5, x^n avec n impair sont des fonctions impaires. La fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, définie sur $\mathbb{R}^*$, est impaire.
3. Il n'y a qu'une seule fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui soit à la fois paire et impaire, c'est la fonction nulle ($f(x) = 0$).

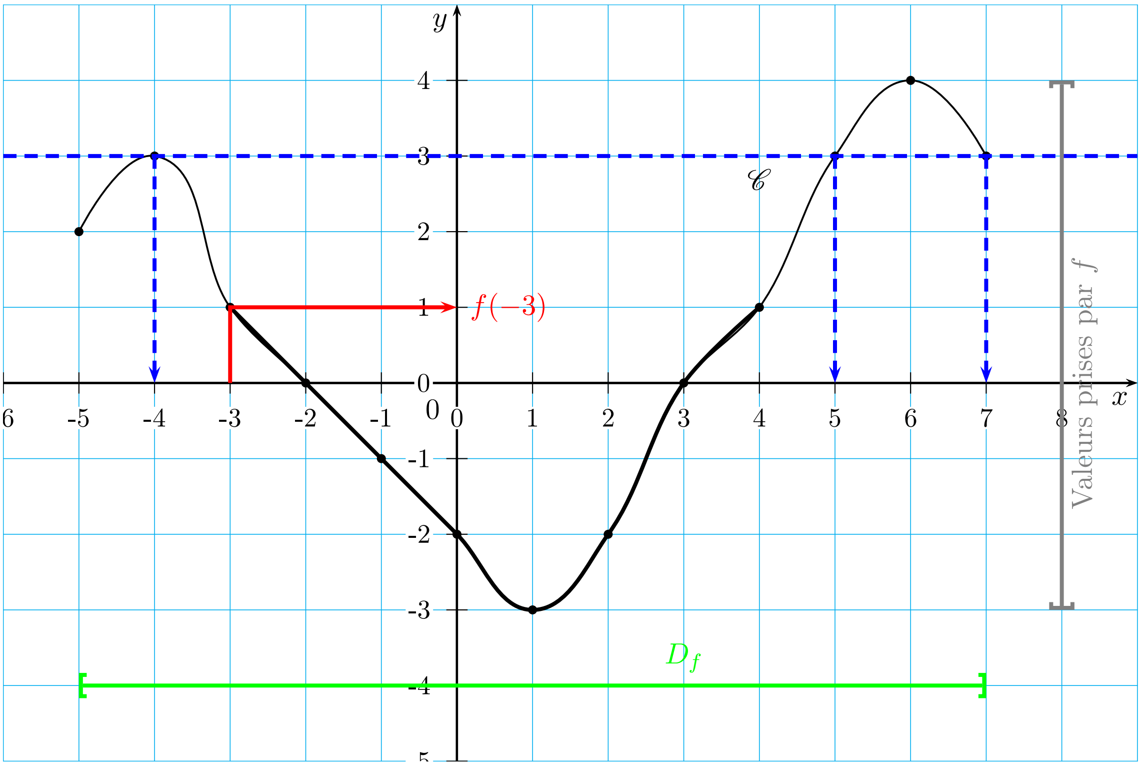
Exercice 2

1. Montrer que la fonction carré et paire, puis tracer l'allure de sa reprsentation graphique
2. Montrer que la fonction valeur absolue est paire et tracer sa représentation graphique.

3. Donner des exemples de fonctions impaires (parmi des fonctions de référence, et parmi des fonction affines).

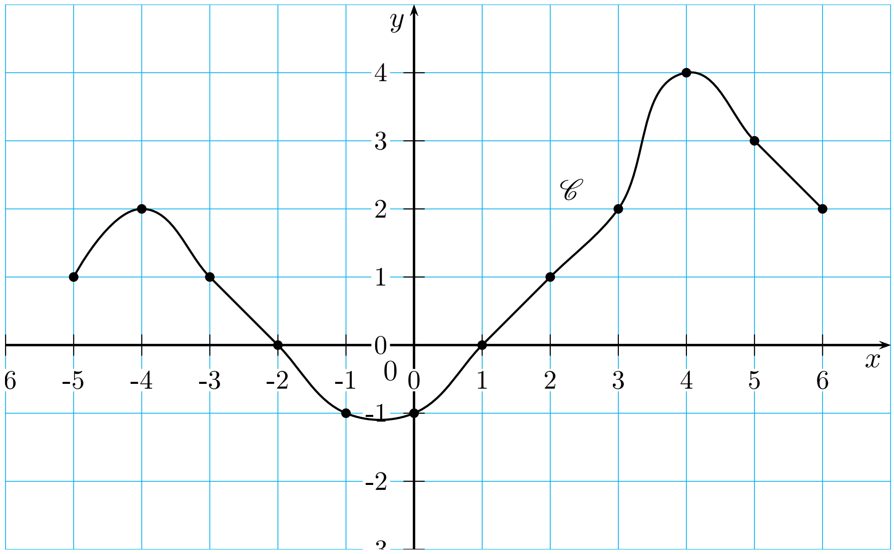
VI Bilan sur les lectures graphiques

On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f.



1. **Ensemble de définition. Ensemble des valeurs prises.**
   L'ensemble de définition se lit sur l'axe des abscisses.
   $D_f = [-5; 7]$
   L'ensemble des valeurs prises par f se lit sur l'axe des ordonnées.
   L'ensemble des valeurs prises par f est $[-3; 4]$.
2. **Lecture d'image.**
   Donner l'image de -3 par f.
   L'image de -3 par f est l'ordonnée du point de $\mathscr{C}$ qui a pour abscisse -3.
   $f(-3) = 1$
3. **Résolution d'équation / recherche d'antécédents.**
   Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 3$.
   Les solutions sont les abscisses des points de $\mathscr{C}$ qui ont pour ordonnée 3.
   $S = \{-4; 5; 7\}$
   Lorsqu'on demande de rechercher les antécédents de 3 par f, c'est le même travail.
   Les antécédents de 3 par f sont -4, 5 et 7.
4. **Résolution d'inéquation.**
   Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant 1$.
   Les solutions sont les abscisses des points de $\mathscr{C}$ qui ont une ordonnée inférieure ou égale à 1.
   $\boldsymbol{S = [-3; 4]}$.

Exercice 3
On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f.



1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Lire graphiquement les images des réels suivants : -4 ; -1 ; 0 ; 2 ; 3 ; 5.
3. Rechercher les antécédents de 1 par f.
4. Rechercher les antécédents de -2 par f.
5. Rechercher les antécédents de 0 par f.
6. On admet que le minimum de f est -1.1.
   Quel est l'ensemble des valeurs prises par f ?
7. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 2$.
   Expliquer la méthode.
8. Résoudre de même l'équation $f(x) = -1$.
9. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant -1$.
   Expliquer la méthode.
10. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 1$.
    Expliquer la méthode.
11. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.