1G. Correction de l'interrogation n° 9.

Exercice 1 (8 points)
On considère le jeu suivant :
le joueur place une mise de n euros sur la table, n étant un entier naturel non nul.
Puis il tire au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes. Si la carte tirée est :

- un as, le joueur récupère sa mise puis gagne sa mise au carré.
- un roi, le joueur récupère sa mise puis gagne sa mise plus huit euros.
- une dame ou un valet, le joueur récupère sa mise puis gagne sa mise.

Dans les autres cas, le joueur perd sa mise.
On note X la variable aléatoire donnant le gain du joueur, en tenant compte de sa mise au départ.

1. Déterminer les différentes valeurs prises par X.
   - S'il tire un as, le joueur a un gain n^2 euros.
   - S'il tire un roi, le joueur gagne $n+8$ euros.
   - S'il tire une dame ou un valet, le joueur gagne n euros.
   - Dans les autres cas, le joueur perd sa mise, soit un gain de $-n$.

   $\boxed{\text{Donc, les valeurs prises par } X \text{ sont : } n^2,\ n+8,\ n \text{ et } -n.}$
2. Déterminer la loi de probabilité de X .
   Il y a équiprobabilité.
   Pour tout événement A, $P(A) = \dfrac{\text{nb cas favorables}}{\text{nb cas total}}$
   - Il y a quatre as sur 52 cartes, donc $P(X = n^2) = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$.
   - Il y a quatre rois sur 52 cartes, donc $P(X = n+8) = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$.
   - Il y a quatre valets et quatre dames sur 52 cartes,
     donc $P(X = n) = \dfrac{8}{52} = \dfrac{2}{13}$.
   - Enfin, il y a $4 \times 9 = 36$ cartes perdantes (2,3,4,5,6,7,8,9,10 de chaque famille).
     Donc $P(X = -n) = \dfrac{36}{52} = \dfrac{9}{13}$.

   On vérifie que $\sum p_i = 1$.
3. $E(X) = \sum x_i \times p_i$.
   $E(X) = n^2 P(X = n^2) + (n+8)P(X = n+8) + nP(X = n) + (-n)P(X = -n)$
   $E(X) = n^2 \times \dfrac{1}{13} + (n+8) \times \dfrac{1}{13} + n \times \dfrac{2}{13} + (-n) \times \dfrac{9}{13}$
   $E(X) = \dfrac{n^2 + (n+8) + 2n + (-9n)}{13}$
   $E(X) = \dfrac{n^2 - 6n + 8}{13}$
4. Le jeu est équitable si et seulement si $E(X) = 0$, c'est à dire $n^2 - 6n + 8 = 0$.
   On obtient une équation du second degré.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 32 = 4 > 0$.
   $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6-2}{2} = 2$.
   $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6+2}{2} = 4$.
   Les deux solutions sont 2 et 4 (qui sont des entiers strictement positifs et peuvent donc correspondre à une mise de départ).
   $\boxed{\text{Le jeu est équitable pour une mise de 2 euros ou de 4 euros.}}$
5. Le joueur peut espérer gagner au moins deux fois sa mise si et seulement si $E(X) \geqslant 2n$.
   $E(X) \geqslant 2n \iff \dfrac{n^2 - 6n + 8}{13} \geqslant 2n \iff n^2 - 6n + 8 \geqslant 26n \iff n^2 - 32n + 8 \geqslant 0$.
   $n^2 - 32n + 8$ est un polynôme du second degré dont le discriminant est $\Delta = 32^2 - 32 = 992$.
   Il a deux racines : $x_1 = \dfrac{32 - \sqrt{992}}{2} = 16 - 2\sqrt{62} \approx 0,25$ et $x_2 = \dfrac{32 + \sqrt{992}}{2} = 16 + 2\sqrt{62} \approx 31,75$.
   Le trinôme prend le signe de a à l'extérieur des racines. Ici, le coefficient de x^2 est 1>0, et n étant un entier naturel, $n^2 - 32n + 8 \geqslant 0$ si et seulement si $n \geqslant 32$.
   $\boxed{\text{Donc, s'il joue un grand nombre de fois, le joueur peut espérer gagner en moyenne au moins deux fois sa mise, si et seulement si sa mise est supérieure ou est égale à 32 euros.}}$

Exercice 2 (7 points)
Soit f la fonction définie sur $[-10;10]$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$.

1. (a) Calculer $f'(x)$, la dérivée de f.
   f est une fonction polynôme, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[-10;10]$.
   $\boxed{\text{Pour tout } x \in [-10;10],\ f'(x) = 3x^2 - 6x - 9.}$

   (b) Déterminer le tableau de variation de f sur $[-10;10]$.
   On étudie le signe de $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 36 + 4 \times 3 \times 9 = 144 = 12^2 > 0$.
   $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6-12}{6} = -1$.
   $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6+12}{6} = 3$.
   Le trinôme $f'(x)$ prend le signe de a à l'extérieur des racines (ici $a = 3 > 0$).

x	-10		-1		3		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1209	$\nearrow$	6	$\searrow$	-26	$\nearrow$	611

   (c) En déduire un encadrement de $f(x)$ lorsque x appartient à $[-10;10]$.
   D'après la question précédente, sur $[-10;10]$, le minimum de f est -1209 et le maximum est 611.
   $\boxed{\text{Donc pour tout } x \in [-10;10],\ -1209 \leqslant f(x) \leqslant 611.}$

2. Existe-t-il des points de $\mathcal{C}$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -9x + 2$? Dans l'affirmative, préciser les coordonnées de ces points.
   La tangente T au point d'abscisse x est parallèle à la droite d'équation $y = -9x + 2$ ssi T a pour coefficient directeur -9 ssi $f'(x) = -9$ ssi $3x^2 - 6x = 0$ ssi $x(3x - 6) = 0$ ssi ($x = 0$ ou $x = 2$).
   $f(0) = 1$ et $f(2) = -21$.
   Il y a deux points en lesquels la tangente a pour coefficient directeur -9 et est donc parallèle à cette droite.
   Ce sont les points $A(0;1)$ et $B(2;-21)$.

Exercice 3 (5 points)
Démontrer que tous les rectangles d'aire 100 ont un périmètre supérieur ou égal à 40.

Indication : on sera amené à étudier les variations la fonction P définie sur $]0;+\infty[$ par $P(x) = 2x + \dfrac{200}{x}$.
Notons x la longueur d'un côté du rectangle.
On a $x > 0$ d'après le contexte.
En notant y l'autre dimension, on a l'aire qui est donnée par l'aire est $xy = 100$, et donc $y = \dfrac{100}{x}$.
Le périmètre est donc $P(x) = 2x + 2y = 2\left(x + \dfrac{100}{x}\right) = 2x + \dfrac{200}{x}$.
La fonction P est dérivable sur $]0;+\infty[$.
Pour tout $x > 0$,
$P'(x) = 2 - \dfrac{200}{x^2} = \dfrac{2x^2 - 200}{x^2} = \dfrac{2(x-10)(x+10)}{x^2}$.
Comme on travaille sur l'intervalle $]0;+\infty[$, $x > 0$, et donc $x + 10 > 0$.
Et comme $x^2 > 0$ et $2 > 0$, $P'(x)$ a le même signe que $x - 10$.

x	0		10		$+\infty$
$P'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$P(x)$	$\Vert$	$\searrow$	40	$\nearrow$	

$P(10) = 2 \times 10 + \dfrac{200}{10} = 40$.

D'après les variations, le périmètre est au minimum de 40, et ce minimum est obtenu lorsque $x = 10$ (le rectangle est alors un carré puisque $y = \dfrac{100}{x} = 10$).