1G. Epreuve blanche de mathématiques. Sujet 2

Lycée Alfred Kastler – Mars 26 – Durée : 2 heures

La calculatrice n'est pas autorisée.

Première partie : Automatismes - QCM (6 points)

Une seule réponse est correcte par question.

Pour chaque question, recopier le numéro et indiquer la réponse choisie.

1. L'ensemble solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x(x^2+1)=0$ est :

   a. $\{0;-1;1\}$ **b.** $\{0;1\}$ **c.** $\{0\}$ **d.** $\{\varnothing\}$ (vide)

2. Dans un repère du plan, sur la droite d'équation $y = 2x - \dfrac{2}{5}$, le point d'ordonnée 0 a pour abscisse

   a. $0,2$ **b.** $1,5$ **c.** $-\dfrac{1}{5}$ **d.** $\dfrac{4}{5}$

3. L'image de $\dfrac{1}{3}$ par la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x - 1$ est :

   a. $-\dfrac{1}{3}$ **b.** $\dfrac{1}{3}$ **c.** $\dfrac{1}{6}$ **d.** $\dfrac{1}{9}$

4. Un prix initial P subit deux baisses successives de 20%.
   On peut affirmer du prix final P' :

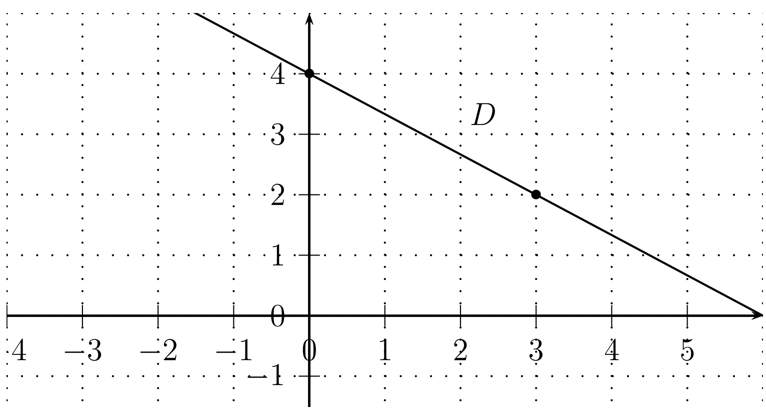
   a. $P' > 0,6 \times P$ **b.** $P' = 0,6 \times P$

   c. $P' < 0,6 \times P$ **d.** Cela dépend de P.

5. Si une quantité vaut 60 après avoir subi une baisse de 12%, alors la valeur initiale est donnée par :

   a. $\dfrac{60}{0,88}$ **b.** $60 \times 1,12$ **c.** $60 \times 0,88$ **d.** $\dfrac{60}{1,12}$

6. Une équation de la droite D représentée ci-dessous est :



   a. $y = \dfrac{2}{3}x + 4$ **b.** $y = -\dfrac{3}{2}x + 4$ **c.** $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} - 1 = 0$ **d.** $2x + 3y = 12$

7. Dans un repère du plan, la droite passant par le point $A(2;0)$ et parallèle à la droite d'équation $y = \dfrac{1}{4}x + 5$ a pour équation :

   a. $y = \dfrac{1}{4}x - 2$ **b.** $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}$ **c.** $y = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{2}$ **d.** $y = 2x + 5$

8. L'expression de fonction compatible avec ce tableau de signe est :

x	$-\infty$		-5		5		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

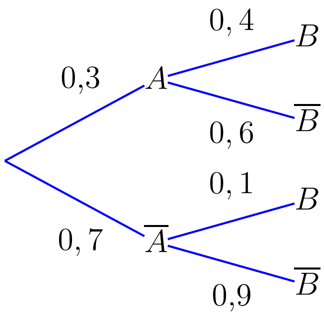
a. $(x-5)(x+5)$ **b.** $-x^2+25$
c. $-3(x-5)^2$ **d.** $(-2x-10)(x+5)$

9. Voici un tableau d'effectifs. On choisit une personne au hasard. Chaque individu a la même probabilité d'être choisi.

	F	G	Total
A	2	8	10
$\overline{A}$	18	22	40
Total	20	30	50

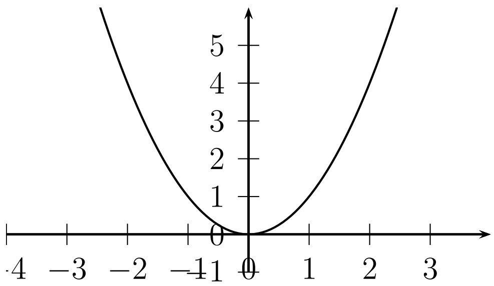
Quelle affirmation est vraie ?
a. $P(A)=10$ **b.** $P(A)=0,2$ **c.** $P_A(F)=2$ **d.** $P_F(A)=0,2$

10. On donne l'arbre pondéré ci-dessous.



Quelle est la valeur de $P(\overline{B})$?
a. $0,6$ **b.** $0,81$ **c.** $0,9$ **d.** $0,19$

11. On a représenté la courbe de la fonction carré, d'équation $y=x^2$.



L'ensemble solution de l'inéquation $x^2>1$ est :

a. $]-1;1[$ **b.** $]1;+\infty[$
c. $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ **d.** $]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$

12. On considère la relation $\dfrac{1}{x}+\dfrac{y}{3}=10$.
On peut affirmer que :
a. $x=\dfrac{3}{30-y}$ **b.** $x=\dfrac{1}{30-y}$ **c.** $x=\dfrac{y}{30-y}$ **d.** $x=10-\dfrac{3}{y}$

Deuxième partie (14 points)

Exercice 1 (6 points)

1. On considère la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^2 + 4x + 3$.
   Justifier que le tableau signe de P est le suivant :

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-2;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x + 2}$$

et on note C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-2;+\infty[$.

(a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-2;+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{P(x)}{(x+2)^2}.$$

(b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]-2;+\infty[$ et construire le tableau de variations de la fonction f sur $]-2;+\infty[$.

(c) Donner le minimum de la fonction f sur $]-2;+\infty[$ et la valeur pour laquelle il est atteint (on donnera les valeurs exactes).

(d) Déterminer le coefficient directeur de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 2.

Exercice 2 (8 points)

En France métropolitaine, 2018 a été l'année la plus chaude d'après les relevés météorologiques. La température moyenne y a été de 14 °C.

1. Pour modéliser l'évolution, on considère l'année 2018 comme l'année zéro et on suppose que la température moyenne augmente de 0,7°C par an chaque année.
   Pour tout entier naturel n, on note alors T_n la température moyenne annuelle en France pour l'année 2018+n. On a donc $T_0 = 14$.
   (a) Quelle est la nature de la suite (T_n) ainsi définie ? Justifier. On donnera son premier terme et sa raison.
   (b) Exprimer T_n en fonction de n.
   (c) On considère qu'au-delà d'une température moyenne de 35°C les corps ne se refroidissent pas et il devient insupportable pour les humains de continuer à habiter cette région que l'on qualifie alors d'inhabitable.
   Selon le modèle considéré, en quelle année la France deviendrait-elle inhabitable pour les humains ? Justifier.
2. À cause du réchauffement climatique, certaines régions risquent de connaître une baisse de 10 % par an des précipitations moyennes annuelles mesurées en millimètres (mm). Dans une région du nord de la France, les précipitations moyennes annuelles étaient de 700 mm en 2018.
   On considère l'année 2018 comme l'année zéro et on suppose que cette baisse de 10 % par an se poursuit chaque année.
   Pour tout entier naturel n, on note P_n les précipitations annuelles moyennes en mm dans cette région pour l'année 2018+n. On pose donc $P_0 = 700$.
   (a) Montrer que $P_1 = 630$.
   (b) Quelle est la nature de la suite (P_n) ainsi définie ? Justifier. On donnera son premier terme et sa raison.
   (c) Pour tout entier naturel n, exprimer P_n en fonction de n.
   (d) On donne le programme Python suivant :

```
def precipitations(J):
    I=700
    n=0
    while I > J:
        I = 0.9*I
        n = n+1
    return n+2018
```

   L'exécution de « `precipitations(300)` » renvoie la valeur 2027. Que représente cette valeur pour le problème posé ?
   (e) On s'intéresse à la quantité totale des précipitations sur la période de 2018 à 2027 inclus.
   Exprimer la valeur exacte, puis en donner une valeur approchée en s'appuyant sur l'aide au calcul.

   Aide au calcul

n	7	8	9	10	11	12
$1 - 0,9^n$ arrondi à 0,01 près	0,52	0,57	0,61	0,65	0,69	0,72