

CRSA1. Correction du contrôle n° 7

Exercice 1 (2 points)

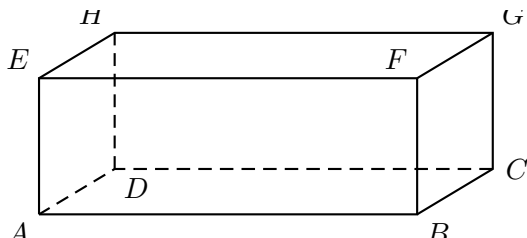
Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les vecteurs $\vec{u}(2; 5; 0)$ et $\vec{v}(-1; 4; 3)$.

1. Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz' = 2 \times (-1) + 5 \times 4 + 0 \times 3 = 18$.

2. Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$.
 $\vec{u} \wedge \vec{v} \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$, soit $\vec{u} \wedge \vec{v} \begin{pmatrix} 5 \times 3 - 0 \times 4 \\ 0 \times (-1) - 2 \times 3 \\ 2 \times 4 - 5 \times (-1) \end{pmatrix}$. Ainsi,
 $\vec{u} \wedge \vec{v} \begin{pmatrix} 15 \\ -6 \\ 13 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (4 points)

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle ayant pour dimensions $AB = 10$, $AD = 6$, et $AE = 6$.



Calculer les produits scalaires suivants. Justifier.

1. $\vec{AB} \cdot \vec{DC}$.
Ces vecteurs sont colinéaires et de même sens.
 $\vec{AB} \cdot \vec{DC} = AB \times DC = 10 \times 10 = 100$
2. $\vec{AB} \cdot \vec{CG} = 0$ car $\vec{AB} \perp \vec{CG}$.
3. $\vec{AB} \cdot \vec{BE}$.
Par projeté orthogonal sur (AB) , $\vec{AB} \cdot \vec{BE} = \vec{AB} \cdot \vec{BA} = -AB^2 = -10 \times 10 = -100$.

4. $\vec{AF} \cdot \vec{ED}$

Par relation de Chasles et linéarité du produit scalaire,

$$\begin{aligned} \vec{AF} \cdot \vec{ED} &= (\vec{AB} + \vec{BF}) \cdot (\vec{EA} + \vec{AD}) \\ &= \vec{AB} \cdot \vec{EA} + \vec{AB} \cdot \vec{AD} + \vec{BF} \cdot \vec{EA} + \vec{BF} \cdot \vec{AD} \\ &= 0 + 0 + EA \times EA + 0 \\ &= 6 \times 6 \\ &= 36 \end{aligned}$$

Exercice 3 (4 points)

On donne les points $A(0; 0; 2)$, $B(6; 2; 2)$, $C(5; 3; 1)$, et $D(-1; 1; 1)$.

1. Montrons que $ABCD$ est un parallélogramme.

$ABCD$ est un parallélogramme ssi $\vec{AB} = \vec{DC}$.

On calcule les coordonnées des vecteurs.

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}, \text{ donc } \vec{AB} \begin{pmatrix} 6 - 0 \\ 2 - 0 \\ 2 - 2 \end{pmatrix}, \text{ puis } \vec{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{De même, } \vec{DC} \begin{pmatrix} 5 - (-1) \\ 3 - 1 \\ 1 - 1 \end{pmatrix}, \text{ soit } \vec{DC} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $\vec{AB} = \vec{DC}$, $ABCD$ est un parallélogramme.

2. Coordonnées de $\vec{AB} \wedge \vec{AD}$.

$$\vec{AD} \begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \\ z_D - z_A \end{pmatrix}, \text{ soit } \vec{AD} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on rappelle $\vec{u} \wedge \vec{v} (yz' - zy'; zx' - xz'; xy' - yx')$.

$$\text{Ici, } \vec{AB} \wedge \vec{AD} \begin{pmatrix} 2 \times (-1) - 0 \times 1 \\ 0 \times (-1) - 6 \times (-1) \\ 6 \times 1 - 2 \times (-1) \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \vec{AB} \wedge \vec{AD} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

3. Aire du parallélogramme $ABCD$.

Par propriété du cours, $Aire(ABCD) = \|\vec{AB} \wedge \vec{AD}\|$.

On rappelle $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Donc $Aire(ABCD) = \|\vec{AB} \wedge \vec{AD}\| = \sqrt{(-2)^2 + 6^2 + 8^2} = \sqrt{4 + 36 + 64} = \sqrt{104}$.

4. Déterminons une valeur approchée de l'angle $\widehat{BAC}$.

$\vec{AC} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. On a vu que $\vec{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

D'une part, $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = xx' + yy' + zz' = 6 \times 5 + 2 \times 3 + 0 \times (-1) = 36$.

D'autre part, $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$.

$AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{6^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

$AC = \|\vec{AC}\| = \sqrt{5^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{35}$

Ainsi, on a $36 = \sqrt{40} \times \sqrt{35} \cos(\widehat{BAC})$.

$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{36}{\sqrt{40}\sqrt{35}}$

Avec la calculatrice, $\widehat{BAC} = \arccos\left(\frac{36}{\sqrt{40}\sqrt{35}}\right) \approx 15,81$ degré.

Arrondi à un degré près, $\widehat{BAC} \approx 16^\circ$.

Exercice 4 (1 point)

Compléter les propriétés de cours sur la fonction logarithme népérien.

Pour tous réels $x > 0$, $a > 0$, et $b > 0$.

$$1. \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

$$2. \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

Exercice 5 (4 points)

1. Écrire sous la forme d'un seul logarithme.

$$A = \ln(5) + \ln(9) = \ln(5 \times 9) = \ln(45)$$

$$B = 2\ln(3) - \ln(11) = \ln(3^2) - \ln(11) = \ln\left(\frac{9}{11}\right)$$

$$C = -3\ln(2) = \ln(2^{-3}) = \ln\left(\frac{1}{8}\right)$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation.

$$2 + e^{3t+1} = 10 \text{ ssi } e^{3t+1} = 8 \text{ ssi } 3t + 1 = \ln(8) \text{ ssi } 3t = \ln(8) - 1$$

$$\text{ssi } t = \frac{\ln(8) - 1}{3}.$$

La solution est $\frac{\ln(8) - 1}{3}$.

3. Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'inéquation $1 + 2\ln(x) < 0$.

$$1 + 2\ln(x) < 0 \text{ ssi } 2\ln(x) < -1 \text{ ssi } \ln(x) < -\frac{1}{2} \text{ ssi } x < e^{-0,5}.$$

$$S =]0; e^{-0,5}[.$$

Exercice 6 (5 points)

Calculer la dérivée des fonctions et en déduire leur tableau de variation (sans les limites aux bornes de l'intervalle).

1. f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 4x + 1 - 2\ln(x)$.

$f'(x) = 4 - \frac{2}{x} = \frac{4x - 2}{x}$ sur $]0; +\infty[$ car $x > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $4x - 2$. Et $4x - 2 > 0$ ssi $x > 0,5$.

$$f(0,5) = 4 \times 0,5 + 1 - 2\ln(0,5) = 3 - 2\ln(0,5)$$

x	0	1/2	$+\infty$
$f'(x)$	$\parallel$	— 0	+
$f(x)$	$\parallel$	$\searrow$	$\nearrow$

$$3 - 2\ln(0,5)$$

2. g est définie sur $] -\infty; \frac{1}{2}[$ par $g(x) = \ln(1 - 2x)$.

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}. \text{ donc } g'(x) = \frac{-2}{1 - 2x}.$$

Pour tout $x \in] -\infty; \frac{1}{2}[$, $1 - 2x > 0$, et $-2 < 0$ (constante négative).

$$\text{Donc } g'(x) < 0 \text{ sur } \left] -\infty; \frac{1}{2} \right[.$$

x	1/2	$+\infty$
$g'(x)$	$\parallel$	—
$g(x)$	$\parallel$	$\searrow$