Term STI. Spécialité. Correction du DS1

Exercice 1 (2 points)
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(2-3\mathrm{i})z = 4+5\mathrm{i}$.
Donner la solution sous forme algébrique.
$z = \dfrac{4+5\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}} = \dfrac{(4+5\mathrm{i})(2+3\mathrm{i})}{(2-3\mathrm{i})(2+3\mathrm{i})} = \dfrac{8+12\mathrm{i}+10\mathrm{i}-15}{2^2+3^2} = \dfrac{-7}{13} + \dfrac{22}{13}\mathrm{i}$

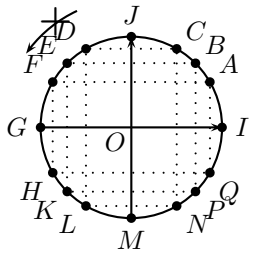
Exercice 2 (3 points)
On donne $z_A = 4+4\mathrm{i}$, $z_B = 1+3\mathrm{i}$, $z_C = 1$.

1. Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
   $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 1+3\mathrm{i}-(4+4\mathrm{i}) = -3-\mathrm{i}$.
2. Déterminer l'affixe du point D pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.
   $ABCD$ est un parallélogramme ssi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
   Or, $z_{\overrightarrow{DC}} = z_{\overrightarrow{AB}}$ ssi $z_C - z_D = -3-\mathrm{i}$, soit $z_D = z_C+3+\mathrm{i} = 1+3+\mathrm{i} = 4+\mathrm{i}$.
   Pour que $ABCD$ soit un parallélogramme, il faut et il suffit que l'affixe de D soit $4+\mathrm{i}$ (ou, en coordonnées $D(4;1)$).

Exercice 3 (3 points)
Soient les points E, F, G d'affixes respectives
$z_E = -1+2\mathrm{i}$, $z_F = 4+4\mathrm{i}$ et $z_G = 1+7\mathrm{i}$.
En calculant des longueurs, montrer que le triangle EFG est isocèle en E.
$EF = |z_F - z_E| = |4+4\mathrm{i}-(-1+2\mathrm{i})| = |5+2\mathrm{i}| = \sqrt{5^2+2^2} = \sqrt{29}$.
$EG = |z_G - z_E| = |1+7\mathrm{i}-(-1+2\mathrm{i})| = |2+5\mathrm{i}| = \sqrt{5^2+2^2} = \sqrt{29}$.
Comme $EF = EG$, le triangle EFG est isocèle en E.

Exercice 4 (2 points)
Compléter le tableau qui associe à chaque point sur le cercle trigonométrique son affixe sous forme exponentielle.

Point sur le cercle	F	K	E	N
Affixe (forme exponentielle)	$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$	$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$



Exercice 5 (5 points)

1. On donne $z = -5+5\mathrm{i}$ sous forme algébrique.
   (a) Mettre z sous forme exponentielle. Justifier.
   On a $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(-5)^2+5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.
   Notons θ un argument de z.
   $\cos\theta = \dfrac{a}{r} = \dfrac{-5}{5\sqrt{2}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$. $\qquad \sin\theta = \dfrac{b}{r} = \dfrac{5}{5\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   On en déduit que $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$.
   $\boxed{\text{Donc } z = 5\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}.}$
   (b) En déduire la forme exponentielle de $\overline{z}$.
   $\overline{z}$ a le même module et un argument opposé à celui de z.
   Donc $\overline{z} = 5\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$.
2. Mettre de même $Z = 2\sqrt{3}+2\mathrm{i}$ sous forme exponentielle. Justifier.
   $r = |Z| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2} = \sqrt{12+4} = 4$.
   $\cos\theta = \dfrac{a}{r} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad \sin\theta = \dfrac{b}{r} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$
   Donc $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.
   $\boxed{\text{Ainsi, } Z = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}.}$

Exercice 6 (1 point)
Mettre sous forme algébrique le nombre $z = 5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$. Justifier.
$a = r\cos\theta = 5\cos\dfrac{\pi}{6} = 5\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$. $\qquad b = r\sin\theta = 5\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5}{2}$.
$\boxed{\text{Donc sous forme algébrique, } z = \dfrac{5\sqrt{3}}{2} + \dfrac{5}{2}\mathrm{i}.}$

Exercice 7 (4 points)
Soient les nombres complexes $z_1 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.
Mettre sous forme exponentielle les nombres suivants :

1. $z_1 \times z_2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \times 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = 2\times 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{-2\pi}{3}\right)} = 8\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
2. $(z_1)^4 = \left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^4 = 2^4 \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}\times 4} = 16\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$.
3. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}} = \dfrac{2}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{-2\pi}{3}\right)} = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$