1G - groupes 8 et 9 - Spécialité mathématiques
Correction du travail à distance n°10

Exercice 1 (87page 206)

1. Encadrement de $\cos x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ pr $f(x) = \dfrac{3 + 2\cos(x)}{5}$.
   (a) Montrons que $f(x)$ est toujours positif.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$, donc $-2 \leqslant 2\cos(x) \leqslant 2$.
   En multipliant par $2 > 0$, le sens des inégalités est conservé.
   En ajoutant 3, le sens des inégalités est conservé, il vient $1 \leqslant 3 + 2\cos(x) \leqslant 5$.
   Enfin, en divisant par 5>0, le sens des inégalités est conservé :
   $\dfrac{1}{5} \leqslant \dfrac{3 + 2\cos(x)}{5} \leqslant 1$, soit $\dfrac{1}{5} \leqslant f(x) \leqslant 1$.
   Il s'ensuit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$. (car $f \geqslant \dfrac{1}{5} > 0$).
   (b) Équation $f(x) = 1$ dans $[0; 2\pi[$.
   $f(x) = 1$ ssi $3 + 2\cos(x) = 5$ ssi $\cos(x) = 1$.
   Dans $[0; 2\pi[$, l'unique solution de cette équation est 0.
   (c) Équation $f(x) = 1$ dans $\mathbb{R}$.
   $f(x) = 1$ ssi $\cos(x) = 1$ ssi il existe un entier k tel que $x = 0 + k \times 2\pi$.
   Les solutions de l'équation $f(x) = 1$ sont les réels $x = 0 + k \times 2\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.
   En notation symbolique, $S = \{k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
3. Montrer qu'il exite un unique réel x de l'intervalle $[0; \pi]$ tel que $f(x) = \dfrac{4}{5}$. Le déterminer.
   $f(x) = \dfrac{4}{5}$ ssi $3 + 2\cos(x) = 4$ ssi $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$.
   On sait que le tableau de variation de la fonction cos sur $[0; 2\pi]$ est le suivant

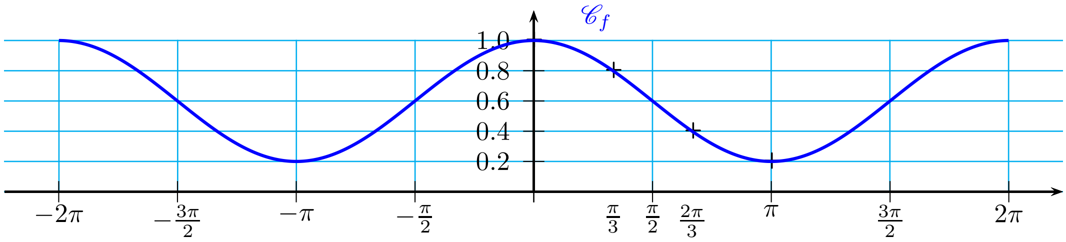
x	0		π		2π
$\cos x$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

   La fonction cosinus est donc strictement décroissante sur l'intervalle $[0; \pi]$

x	0		π
$\cos(x)$	1	$\searrow$	-1

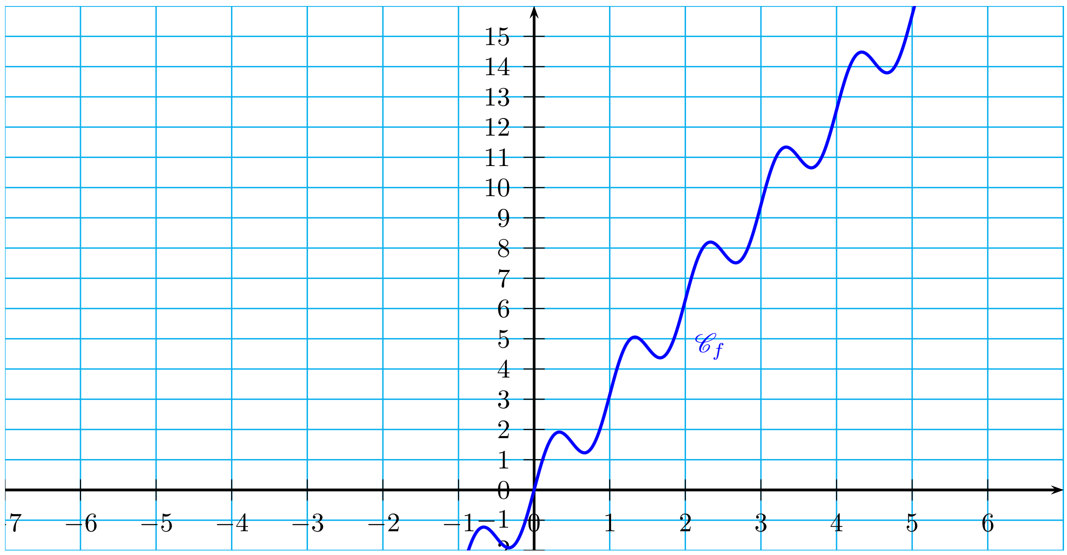
   En 1re G, on admet que la fonction cos est continue sur $\mathbb{R}$, et donc sur $[0; \pi]$.
   D'après le tablau de variation de cos, l'équation $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$ a une unique solution dans $[0; \pi]$, et donc l'équation $f(x) = \dfrac{4}{5}$ admet une unique solution sur $[0; \pi]$.
   Dans $[0; \pi]$, $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$ ssi $x = \dfrac{\pi}{3}$.
   La solution de l'équation $f(x) = \dfrac{4}{5}$ dans $[0; \pi]$ est $\dfrac{\pi}{3}$.
4. (a) Montrons que f est 2π-périodique. Interpréter graphiquement.
   On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$.
   Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + 2\pi) = \dfrac{3 + 2\cos(x + 2\pi)}{5} = \dfrac{3 + 2\cos(x)}{5} = f(x)$.
   Donc f est 2π-périodique, et sa représentation graphique est invariante par tranlation de vecteur $2\pi \vec{i}$.
   (b) Montrons que f est paire, interpréter graphiquement.
   On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos(x)$.
   Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \dfrac{3 + 2\cos(-x)}{5} = \dfrac{3 + 2\cos(x)}{5} = f(x)$.
   Donc f est paire, et sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

5. Tracer $\mathscr{C}_f$ sur $[-2\pi; 2\pi]$.
   On trace d'abord la courbe de f sur $[0; \pi]$, puis on complète sur $[-\pi; 0]$ avec la symétrie d'axe (Oy), et enfin on exploite la pédiodicité de pérode 2π.
   Pour l'intervalle $[0; \pi]$, on calcule quelques images pour placer des points.
   On rappelle, vu précédemmment dans l'exercice, que $f(\dfrac{\pi}{3}) = \dfrac{4}{5}$.
   On a aussi $f(0) = 1$, et $f(\pi) = \dfrac{1}{5}$, $f(\frac{\pi}{2}) = 0,6$, $f(\dfrac{2\pi}{3}) = \dfrac{2}{5}$.



Exercice 2 (108 page 214)

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(2\pi x) + \pi x$.
   Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$, soit $u_n = \sin(n \times 2\pi) + n\pi$.
   (a) Représenter la fonction f à la calculatrice.



   (b) Pourquoi f n'est-elle pas monotone ?
   $f(0) = 0$ et $f(1) = 3$.
   Comme $0 < 1$ et $f(0) < f(1)$, f ne peut pas être décroissante sur $\mathbb{R}$.
   Avec la calculatrice, $f(0,3) \approx 1,89$ et $f(0,7) \approx 1,25$.
   Comme $0,3 < 0,7$ et $f(0,3) > f(0,7)$, f n'est pas non plus croissante sur $\mathbb{R}$.
   Donc f n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.
   (c) Exprimer $u_{n+1} - u_n$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin(2\pi \times n) = \sin(2\pi) = \sin 0 = 0$.
   Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $u_{n+1} - u_n = \sin((n+1) \times 2\pi) + (n+1)\pi - [\sin(n \times 2\pi) + n\pi] = (n+1)\pi - n\pi = \pi$.
   (d) En déduire la nature et le sens de variation de (u_n).
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \pi$.
   Donc la suite (u_n) est arithmétique de raison π.
   Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \pi > 0$, la suite (u_n) est croissante.
   On pouvait aussi rappeler la propriété relative au sens de variation des suites arithmétiques.
   Comme la raison est $r = \pi > 0$, la suite arithmétique est strictement croissante.
2. Soit g une fonction définie sur $[0; +\infty[$ et (v_n) la suite définie par $v_n = g(n)$.
   (a) Montrons que si g est croissante alors $v(n)$ est croissante.
   On suppose que g est croissante sur $[0; +\infty[$.

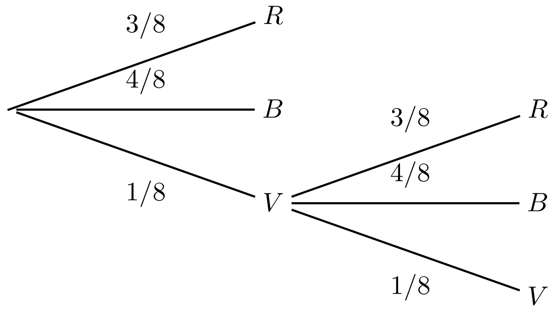
Pour tout entier naturel n, il est clair que $0 \leqslant n < n+1$.
Comme g est croissante sur $[0;+\infty[$, $g(n) \leqslant g(n+1)$, soit $v_n \leqslant v_{n+1}$.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \geqslant v_n$.
La suite (v_n) est croissante.

(b) Étudier la réciproque de cette implication.
La réciproque est l'implication : " Si la suite (v_n) est croissante, alors g est croissante".
Cette réciproque est fausse.
La fonction f de la question 1. fait contre-exemple :
La suite de terme général $u_n = f(n)$ est croissante et pourtant f n'est pas croissante sur $[0;+\infty[$.

Exercice 3 (77 page 331)

1. Dans cette question, $n = 1$.

(a) Loi de X_1



Les valeurs possibles de X_1 sont 16 ;-12 ; 8 ; -2, et 0.

$P(X_1 = 16) = P(R) = \dfrac{3}{8}$

$P(X_1 = -12) = P(B) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

$P(X_1 = 8) = P(V;R) = \dfrac{1}{8} \times \dfrac{3}{8} = \dfrac{3}{64}$

$P(X_1 = -2) = P(V;B) = \dfrac{1}{8} \times \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{16}$

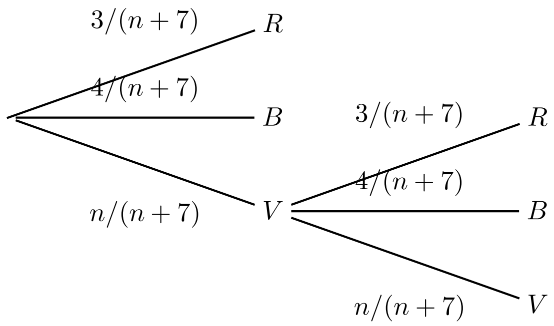
$P(X_1 = 0) = P(V;V) = \dfrac{1}{8} \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{64}$

x_i	16	-12	8	-2	0
$P(X_1 = x_i)$	$\dfrac{3}{8}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{3}{64}$	$\dfrac{1}{16}$	$\dfrac{1}{64}$

On peut vérifier que la somme ds p_i fait 1.

(b) Expérance de X_1.
$E(X_1) = \sum x_i \times p_i = 16 \times \dfrac{3}{8} + \cdots + 0 \times \dfrac{1}{64} = 0,25$.

2. Loi de X_n.
Désormais, la roue a 3 secteurs rouges, 4 blancs, et n verts ($n \geqslant 1$). Il y a au total $(n+7)$ secteurs.



Les valeurs possibles de X_n sont toujours 16 ;-12 ; 8 ; -2, et 0.

$P(X_n = 16) = P(R) = \dfrac{3}{n+7}$

$P(X_n = -12) = P(B) = \dfrac{4}{n+7}$

$P(X_n = 8) = P(V;R) = \dfrac{n}{n+7)} \times \dfrac{3}{n+7} = \dfrac{3n}{(n+7)^2}$

$P(X_n = -2) = P(V; B) = \dfrac{n}{n+7} \times \dfrac{4}{n+7} = \dfrac{4n}{(n+7)^2}$

$P(X_n = 0) = P(V; V) = \dfrac{n}{n+7} \times \dfrac{n}{n+7} = \dfrac{n^2}{(n+7)^2}$

x_i	16	-12	8	-2	0
$P(X_n = x_i)$	$\dfrac{3}{n+7}$	$\dfrac{4}{n+7}$	$\dfrac{3n}{(n+7)^2}$	$\dfrac{4n}{(n+7)^2}$	$\dfrac{n^2}{(n+7)^2}$

3. Espérance de X_n.

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \sum x_i \times p_i \\ &= \frac{16 \times 3(n+7) - 12 \times 4 \times (n+7) + 8 \times 3n - 2 \times 4n + 0 \times n^2}{(n+7)^2} \\ &= \frac{48(n+7) - 48(n+7) + 24n - 8n}{(n+7)^2} \\ &= \frac{16n}{(n+7)^2} \end{aligned}$$

4. Étude de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{(x+7)^2}$ sur $[0; +\infty[$.
   $x + 7 = 0$ ssi $x = -7$.
   Donc $x + 7$ ne s'annule pas sur $[0; +\infty[$.
   La fonction f est donc dérivable par quotient de fonctions dérivables.
   En posant $u(x) = x$ et $v(x) = (x+7)^2 = x^2 + 14x + 49$, on a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2x + 14$.
   On rappelle la formule de dérivée d'un quotient de fonctions : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
   Pour tout $x \in [0; +\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \times (x+7)^2 - x \times (2x+14)}{[(x+7)^2]^2} \\ &= \frac{(x+7)^2 - 2x(x+7)}{(x+7)^4} \\ &= \frac{(x+7)(x+7-2x)}{(x+7)(x+7)^3} \\ &= \frac{7-x}{(x+7)^3} \end{aligned}$$

   Sur $[0; +\infty[$, $x + 7 > 0$, donc $(x+7)^3 > 0$.
   Donc f' a le même signe de $7 - x$, qui s'annule en $x = 7$.

x	0		7		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1/28	$\searrow$	

5. En déduire la valeur de n que rend $E(X_n)$ maximale. Quelle est la valeur maximale de $E(X_n)$?
   $E(X_n) = 16 \times f(n)$, et la multiplication par $16 > 0$ ne change pas le sens de variation.
   Donc $E(X_n)$ est maximal lorsque f est maximal, soit lorsque $n = 7$.
   $E(X_7) = 16 \times f(7) = \dfrac{16}{28} = \dfrac{4}{7} \approx 0,57$.
   Interprétation :
   C'est lorsque la roue a 7 secteurs verts que le jeu est le plus avantageux pour le joueur (la meilleure espérance de gain).
   Dans ce cas, l'espérance est de $\dfrac{4}{7}$, ce qui signifie que le joueur gagne en moyenne 0,57 euro par partie.