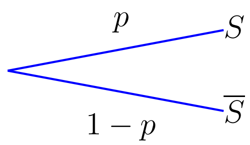
Chapitre 7 : Loi binomiale

I Épreuve de Bernoulli, schéma de Bernoulli

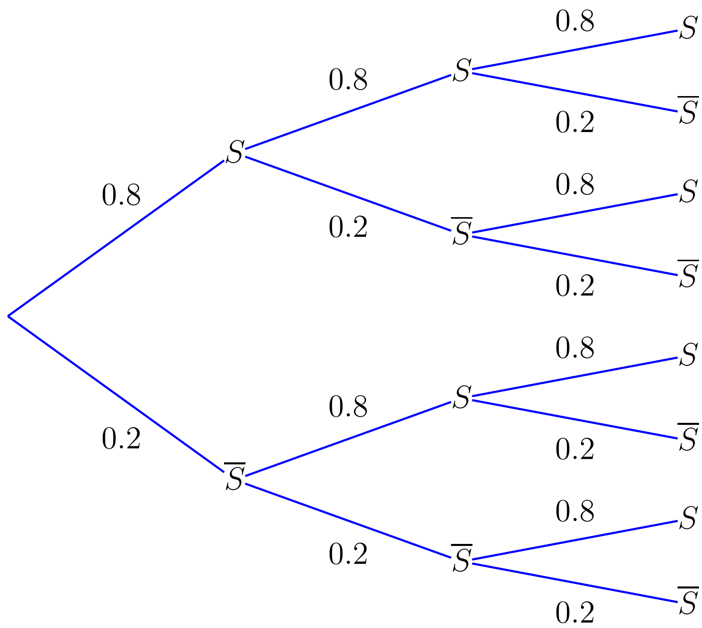
Définition
Une expérience à deux issues, succès ou échec, est appelée « épreuve de Bernoulli ».
On note S le succès et p sa probabilité : $P(S) = p$.
L'autre issue est alors $\overline{S}$ et $P(\overline{S}) = 1 - p$.



Remarque
S et $\overline{S}$ sont des événements contraires, donc $P(\overline{S}) = 1 - p$.

On parle de « schéma de Bernoulli » lorsqu'on effectue une répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.
Représentation
On considère une épreuve de Bernoulli de paramètre p. Soit n un entier, $n \geqslant 1$.
Un schéma de Bernoulli associé à n répétitions de cette épreuve peut être représenté par un arbre pondéré qui comporte n niveaux.

Exercice 1
Un archer tire successivement 3 flèches. La probabilité qu'il touche sa cible (S) est de 0.8.
On a donc $n = 3$ et $p = 0.8$.
L'expérience peut se représenter par l'arbre suivant :



1. Donner l'univers associé à cette expérience, c'est-à-dire lister toutes les issues.
2. On note X la variable aléatoire qui correspond au nombre de fois où l'archer touche la cible sur les 3 tentatives.
   (a) Compléter les valeurs de X correspondant à chaque issue à côté de l'arbre.
   (b) Quelles sont les valeurs possibles de X ?
   (c) Décrire l'événement $(X = 3)$ et calculer sa probabilité.
   (d) Décrire l'événement $(X = 1)$ et calculer sa probabilité.

II Loi binomiale

Définition
Soient n un entier $n \geqslant 1$ et $p \in]0;1[$.
On répète n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre p.
Soit X la fonction qui à chaque issue, associe le nombre de succès obtenus.
On dit alors que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p.
On note $\mathscr{B}(n;p)$ cette loi.

Propriété (et définition)
Soient n un entier $n \geqslant 1$ et $p \in]0;1[$.
Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p.
Alors la variable aléatoire X prend pour valeurs les entiers de 0 jusqu'à n.
On note $(X = k)$ l'événement "on obtient k succès", et on note $P(X = k)$ sa probabilité.
On appelle loi de X la donnée toutes les probabilités $P(X = k)$ pour k allant de 0 jusqu'à n.

Remarque (Étude de quelques cas particuliers)

1. Calcul de $P(X = 0)$.
   L'événement $\{X = 0\}$ est réalisé sur l'unique chemin de l'arbre qui ne comporte que des échecs, c'est-à-dire le dernier chemin de l'arbre qui est constitué de n branches qui ont toutes la probabilité $1 - p$.
   D'où le résultat : $P(X = 0) = (1 - p)^n$.
2. Calcul de $P(X = n)$.
   L'événement $\{X = n\}$ est réalisé sur l'unique chemin de learbre qui ne comporte que des succès, c'est-à-dire le premier chemin de l'arbre qui est constitué de n branches qui ont toutes la probabilité p. D'où le résultat : $P(X = n) = p^n$.

II.1 Utilisation de la calculatrice

Casio

1. Pour calculer $P(X = k)$, la commande est `binomialPD(`k`,`n`,`p`)`.
   On la trouve via $\boxed{\text{Opt}}$, menu $\boxed{\text{stat}}$, sous menu $\boxed{\text{DIST}}$, puis $\boxed{\text{BINM}}$.
2. Pour calculer $P(X \leqslant k)$, la commande est `binomialCD(`k`,`n`,`p`)`.
   On la trouve via le même chemin.
3. Pour dresser l'ensemble de la loi de probabilité, ces commandes peuvent être utilisées comme des fonctions.
   Exemple : On souhaite déterminer la loi de X suivant la loi binomiale de paramètres $n = 7$ et $p = 0,2$.
   Dans le menu $\boxed{\text{TABLE}}$, on entre $Y_1 =$ `binomialPD(X,7,0.3)`.
   On lit les valeurs dans $\boxed{\text{table}}$ (éventuellement à paramétrer dans $\boxed{\text{SET}}$ touche F5).

Texas TI-82 ou TI-83

1. Pour calculer $P(X = k)$, la commande est `binomFdp(`n`,`p`,`k`)`.
   On la trouve via $\boxed{\text{Distrib}}$ (touche $\boxed{2^{\text{nd}}}$, $\boxed{\text{var}}$).
2. Pour calculer $P(X \leqslant k)$, la commande est `binomFRép(`n`,`p`,`k`)`.
   On la trouve via $\boxed{\text{Distrib}}$ (touche $\boxed{2^{\text{nd}}}$, $\boxed{\text{var}}$).

3. Pour dresser l'ensemble de la loi de probabilité, ces commandes peuvent être utilisées comme des fonctions.
Exemple : On souhaite déterminer la loi de X suivant la loi binomiale de paramètres $n = 7$ et $p = 0,2$.
Dans le menu $\boxed{f(x)}$, on entre $Y_1 =$ `binomFdp(7,0.2,X)`.
On lit les valeurs dans $\boxed{\text{table}}$ (éventuellement à paramétrer dans $\boxed{\text{def table}}$) :

X	Y_1
0	0,21
1	0,367
2	0,276
3	0,115
4	0,029
5	0,004
6	3×10^{-4}
7	$1,3 \times 10^{-5}$

Exercice 2

1. Probabilité d'un événement élémentaire associé à une loi binomiale : ressource 1922
2. Probabilité d'un événement associé à une loi binomiale : ressource 1934
3. Compléter le tableau complet donnant la loi de probabilité d'une loi binomiale : ressource 3945

II.2 Espérance, variance et écart-type de la loi binomiale

Par analogie avec la moyenne en statistiques, on définit, pour une variable aléatoire X, une grandeur appelée l'espérance mathématique en remplaçant les fréquences statistiques par les probabilités.
On admet que pour une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$, cette espérance est $E(X) = n \times p$.
De la même façon, on définit la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire.

Théorème (admis)
Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p. Alors,

1. L'espérance de X est $E(X) = np$,
2. La variance de X est $V(X) = np(1-p)$,
3. L'écart-type de X est $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

Exercice 3
On reprend l'exemple du tir à l'arc.
L'archer tire 8 flèches de façon indépendante, et la probabilité qu'il touche la cible est à chaque fois de 0,9.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois que l'archer touche la cible.

1. X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres : $n = \ldots$, et $p = \ldots$.
2. Les valeurs de X sont : ...
3. Calculer $E(X)$.
   ....
4. Interpréter ce résultat.
   ....
   ....

5. Calculer $V(X)$ et $\sigma(X)$.
   ....
   ....

Remarque

1. $E(X)$ s'interprète comme la moyenne des valeurs X si l'on répétait l'expérience un très grand nombre de fois.
2. L'écart-type de X est un indicateur de la dispersion des valeurs de X par rapport à l'espérance $E(X)$.