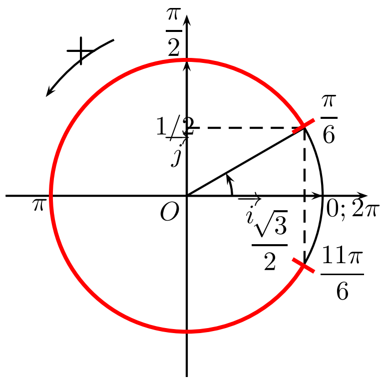
Correction du Dm9

Exercice 1 (n° 109 page 89)

f est la fonction définie sur $I = [-2\pi; 2\pi]$ par $f(x) = \sqrt{3}x - 2\sin x$

1. Exprimer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$.
   Pour tout $x \in I$,
$$\begin{aligned} f(-x) &= \sqrt{3} \times (-x) - 2\sin(-x) \\ &= -\sqrt{3}x + 2\sin(x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$
2. Justifier pourquoi il suffit d'étudier f sur $[0; 2\pi]$.
   Comme pour tout $x \in I$, $f(-x) = f(x)$, la fonction f est impaire, et donc sa courbe est symétrique par rapport au point O.
   Il suffit d'étudier f sur $[0; 2\pi]$ et l'on complètera la courbe représentative par symétrie par rapport à O sur $[-2\pi; 0]$.
3. Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de x.
   f est dérivable sur I par somme de fonctions dérivables.
   Pour tout $x \in [-2\pi; 2\pi]$, $f'(x) = \sqrt{3} - 2\cos(x)$.
4. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0; 2\pi]$, et dresser le tableau de variation de f sur $[0; 2\pi]$.
$$\begin{aligned} f'(x) &> 0 \\ \sqrt{3} - 2\cos(x) &> 0 \\ -2\cos x &> -\sqrt{3} \\ \cos x &< \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$
   En raisonnant sur le cercle, sur l'intervalle $[0; 2\pi]$, on observe que $f'(x) > 0$ lorsque $x \in \left]\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right[$.



x	0		$\pi/6$		$11\pi/6$		2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{\pi\sqrt{3}}{6} - 1$	$\nearrow$	$\frac{11\pi\sqrt{3}}{6} + 1$	$\searrow$	$2\pi\sqrt{3}$

Exercice 2 (n° 112 page 90)

La fonction tangente est définie par $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

On va étudier cette fonction, notée f, sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. (a) Exprimer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$.
$$\begin{aligned} \tan(-x) &= \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} \\ &= \frac{-\sin x}{\cos x} \\ &= -\tan x \end{aligned}$$
   (b) En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $J = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.
   La fonction tangente est donc impaire, et sa courbe représentative est symétrique par rapport au point O.
   Il suffit d'étudier f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, et l'on complètera la courbe par symétrie par rapport au point O sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$.
2. Déterminer la limite de f en $\frac{\pi}{2}$. Que peut-on en déduire ?
   $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = \sin \frac{\pi}{2} = 1$.
   $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \cos x = 0+$.

   > Par quotient, $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan x = +\infty$.
   > La droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}$.
3. Exprimer $f'(x)$ en fonction de x.
   Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in$

$\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\cos x \neq 0$.

Par quotient, la fonction f est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos(x)\times\cos(x)-\sin(x)\times(-\sin x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2+\sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} > 0 \end{aligned}$$

4. Dresser le tableau de variation de f sur J.

Comme un carré est toujours positif, pour tout $x \in J$, $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} > 0$.

Donc f est strictement cropissante sur $J = \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

$f(0) = 0$, et on a vu que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} f(x) = +\infty$.

x	0		$\pi/2$
$\tan x$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 0.

$f(0) = 0$, et $f'(0) = \dfrac{1}{\cos^2(0)} = 1$.

$$\begin{aligned} y &= f'(0)(x-0)+f(0) \\ y &= 1x+0 \\ y &= x \end{aligned}$$

$\boxed{\text{La tangente } T \text{ a pour équation } y = x.}$

6. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et T sur I.

On étudie la signe de $f(x) - x$.

$$\begin{aligned} f(x)-x &= \frac{\sin x}{\cos x} - x \\ &= \frac{\sin x - x\cos x}{\cos x} \end{aligned}$$

Sur $I = \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$, il est clair que $\cos x > 0$.

Donc $f(x) - x$ est du signe de $g(x) = \sin x - x\cos x$.

La fonctions g est dérivable sur I par produit et somme de fonctions dérivables.

Pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \cos x - (1\times\cos x + x\times(-\sin x)) \\ &= \cos x - \cos x + x\sin x \\ &= x\sin x \end{aligned}$$

x	$-\pi/2$		0		$\pi/2$
x		$-$	0	$+$	
$\sin x$		$-$	0	$+$	
$g'(x) = x\sin x$		$+$	0	$+$	

La dérivée de g est strictement positive sur I sauf en 0 où elle s'annule.

La fonction g est donc strictement croissante sur $I = \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$.

On remarque que $g(0) = \sin 0 - 0\times\cos 0 = 0$.

Comme g est strictement croissante et I et $g(0) = 0$, on peut donner le signe de g :

x	$-\pi/2$		0		$\pi/2$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la tangente T sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$,

La courbe $\mathscr{C}$ est en-dessous de la tangente T sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};0\right[$.

7. Tracer T et $\mathscr{C}$ sur I.