Contrôle n° 9. Correction du Sujet 1

Exercice 1 (2 points)
Donner sans justifier :

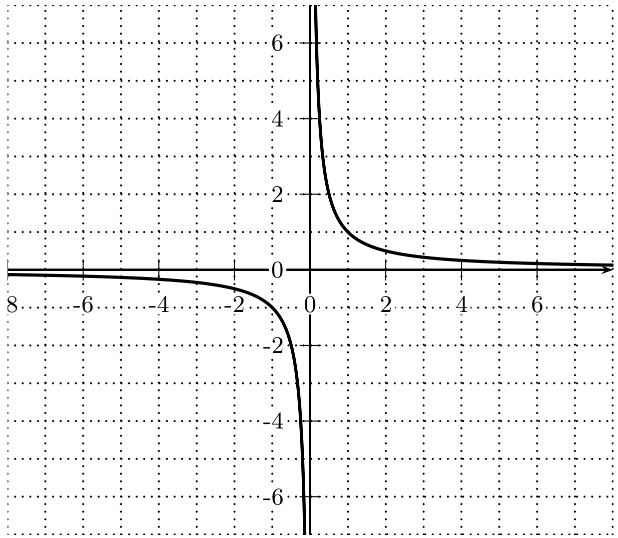
1. le tableau de variation de la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$\searrow$	0	$\nearrow$

2. le sens de variation de la fonction affine g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\dfrac{1}{3}x + 7$.

$\boxed{g \text{ est décroissante sur } \mathbb{R} \text{ (car } a = -\dfrac{1}{3} < 0\text{).}}$

3. la courbe représentative de la fonction inverse.



Exercice 2 (1 point)
On se place dans un repère du plan.

Étudier si les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1/3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -4 \\ 60 \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

$\det(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = xy' - yx' = \dfrac{1}{3} \times 60 - (-2) \times (-4) = 20 - 8 = 12 \neq 0$.

$\boxed{\text{Donc } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ ne sont pas colinéaires.}}$

Exercice 3 (2 points)
Dans un repère du plan, on donne les points $A(-1;-2)$, $B(2;-1)$, $C(4;2)$, et $D(5;7)$. Les droites (AD) et (BC) sont-elles parallèles ? Justifier.

$(AD)//(BC)$ ssi les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 5+1 \\ 7+2 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$.

De même, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 4-2 \\ 2+1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On peut remarquer que $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{BC}$.
Sinon, $\det(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{BC}) = xy' - yx' = 6 \times 3 - 9 \times 2 = 18 - 18 = 0$.
Donc $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

$\boxed{\text{Les droites } (AD) \text{ et } (BC) \text{ sont parallèles.}}$

Exercice 4 (5 points)
Dans tout l'exercice, on pourra répondre sans justification.

1. Résoudre les équations et inéquations suivantes.
   (a) $x^2 = 11$ $\boxed{\text{Les solutions sont } \sqrt{11} \text{ et } -\sqrt{11}.}$
   (b) $x^2 < 9$ $\boxed{S =]-3;3[.}$
   (c) $\dfrac{1}{x} > 1$ $\boxed{S =]0;1[.}$
   (d) $x^3 > 8$ $\boxed{S =]2;+\infty[.}$
2. Dans chaque cas, donner le meilleur encadrement de x^2.
   (a) $3 < x < 7$ $\boxed{9 < x^2 < 49}$
   (b) $-4 \leqslant x \leqslant 5$ $\boxed{0 \leqslant x^2 < 25}$
   (c) $-5 \leqslant x \leqslant -1$ $\boxed{1 \leqslant x^2 \leqslant 25}$
3. Dans cette question on donne $2 \leqslant x \leqslant 6$.
   (a) Encadrer $\dfrac{1}{x}$. $\boxed{\dfrac{1}{6} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{2}}$
   (b) Encadrer x^3. $\boxed{8 \leqslant x^3 \leqslant 216}$

Exercice 5 (4 points)
Résoudre les inéquations suivantes. Donner l'ensemble solution sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles.

1. $\dfrac{2x+1}{(x-6)(-3x+12)} \geqslant 0$.
   Valeurs clés :
   $2x+1=0$ ssi $x=-\dfrac{1}{2}$.
   $x-6=0$ ssi $x=6$ (valeur interdite)
   $-3x+12=0$ ssi $x=4$ (valeur interdite).

x	$-\infty$		$-1/2$		4		6		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-6$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$-3x+12$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$\dfrac{2x+1}{(x-6)(-3x+12)}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	

$\boxed{S=\left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]\cup]4;6[.}$

2. $\dfrac{3x+7}{-x+4} \geqslant 5$.
   $\dfrac{3x+7}{-x+4} \geqslant 5$ ssi $\dfrac{3x+7}{-x+4}-\dfrac{5(-x+4)}{-x+4} \geqslant 0$, ssi $\dfrac{3x+7+5x-20}{-x+4} \geqslant 0$, ssi $\dfrac{8x-13}{-x+4} \geqslant 0$.

x	$-\infty$		$13/8$		4		5
$8x-13$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+4$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{8x-13}{-x+4}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

$\boxed{S=\left[\dfrac{13}{8};4\right[.}$

Exercice 6 (2 points)
$n \leftarrow 0$
Tant que $n^2 < 2\,000$
    $n \leftarrow n+5$
Fin tant que
Afficher n

1. Faire tourner l'algorithme suivant à la main.

n	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
n^2	0	25	100	225	400	625	900	1225	1600	2025
Test $n^2 <$ 2000	v	v	v	v	v	v	v	v	v	f

2. Que renvoie cet algorithme ? Interpréter le résultat.
   Il renvoie 45. Le plus petit multiple de 5 dont le carré est supérieur ou égal à 2000 est 45.

Exercice 7 (2 points)
On place 2000 euros à un taux d'intérêts annuel de 5%. Compléter la fonction Python pour que `duree(2000)` renvoie le nombre d'années de placement à partir duquel le montant obtenu devient supérieur ou égal à 2500.

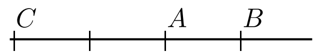
```
def duree(montant):
    n=0
    while montant<2500 :
        montant=montant*1.05
        n=n+1
    return(n)
```

Exercice 8 (2 points)
Soient A, B, C trois points du plan tels que $3\overrightarrow{CA}-2\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{0}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{AB}$.

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{CA}-2\overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{0} \\ 3\overrightarrow{CA}-2(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}) &= \overrightarrow{0} \\ 3\overrightarrow{CA}-2\overrightarrow{CA}-2\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{CA}-2\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{0} \\ -\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{AC} &= -2\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

2. Placer le point C sur la droite (AB).



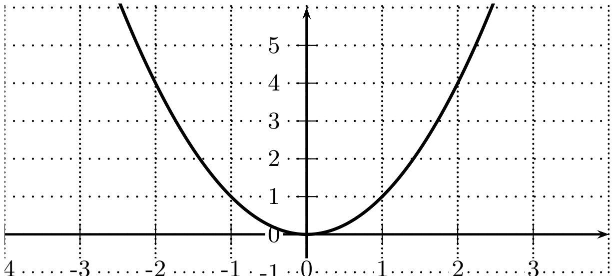
Correction du Sujet 2

Exercice 9 (2 points)
Donner sans justifier :

1. le tableau de variation de la fonction inverse définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

2. le sens de variation de la fonction affine g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=2x-11$.
$\boxed{g \text{ est croissante sur } \mathbb{R} \text{ (car } a=2>0).}$
3. la courbe représentative de la fonction carré.



Exercice 10 (1 point)
Étudier si les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1/3\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-10\\60\end{pmatrix}$ sont colinéaires.
$\det(\vec{u};\vec{v})=xy'-yx'=\dfrac{60}{3}-(2)\times(-10)=20-20=0.$
$\boxed{\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires. (on pouvait remarquer que } \vec{v}=-30\vec{u}).}$

Exercice 11 (2 points)
Dans un repère du plan, on donne les points $A(-1;-2)$, $B(2;-1)$, $C(4;2)$, et $D(5;7)$. Les droites (AC) et (BD) sont-elles parallèles ? Justifier. $(AC)//(BD)$ ssi $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires.
$\overrightarrow{AC}(4+1;2+2)$ soit $\overrightarrow{AC}(5;4)$ et $\overrightarrow{BD}(3;8)$.
$\det(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BD})=xy'-yx'=5\times 8-4\times 3=40-12=28\neq 0$.
Donc $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ ne sont pas colinéaires.
$\boxed{\text{Les droites } (AC) \text{ et } (BD) \text{ ne sont pas parallèles (elle ssont sécantes).}}$

Exercice 12 (5 points)
Dans tout l'exercice, on pourra répondre sans justification.

1. Résoudre les équations et inéquations suivantes.
   (a) $x^2=-4$ $\boxed{\text{Il n'y a pas de solution.}}$
   (b) $x^2>1$ $\boxed{S=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[.}$
   (c) $\dfrac{1}{x}<3$ $\boxed{S=]-\infty;0[cup]\dfrac{1}{3};+\infty[}$
   (d) $x^3\leqslant 0$ $\boxed{S=]-\infty;0]}$
2. Dans chaque cas, donner le meilleur encadrement de x^2.
   (a) $-3<x<-2$ $\boxed{4<x^2<9}$
   (b) $-3\leqslant x\leqslant 2$ $\boxed{0\leqslant x^2\leqslant 9}$
   (c) $5\leqslant x\leqslant 8$ $\boxed{25\leqslant x^2\leqslant 64}$
3. Dans cette question on donne $-10\leqslant x\leqslant -2$.
   (a) Encadrer $\dfrac{1}{x}$. $\boxed{-\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{1}{x}\leqslant-\dfrac{1}{10}}$
   (b) Encadrer x^3. $\boxed{-1000\leqslant x^3\leqslant -8}$

Exercice 13 (4 points)
Résoudre les inéquations suivantes. Donner l'ensemble solution sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles.

1. $\dfrac{2x+1}{(x-6)(-3x+12)}\geqslant 0$.
   Valeurs clés :
   $2x+1=0$ ssi $x=-\dfrac{1}{2}$.
   $x-6=0$ ssi $x=6$ (valeur interdite)
   $-3x+12=0$ ssi $x=4$ (valeur interdite).

x	$-\infty$		$-1/2$		4		6		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-6$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$-3x+12$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$\dfrac{2x+1}{(x-6)(-3x+12)}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	

$$\boxed{S = \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup]4;6[.}$$

2. $\dfrac{3x+7}{-x+4} \geqslant 5$.

$\dfrac{3x+7}{-x+4} \geqslant 5$ ssi $\dfrac{3x+7}{-x+4} - \dfrac{5(-x+4)}{-x+4} \geqslant 0$, ssi $\dfrac{3x+7+5x-20}{-x+4} \geqslant 0$, ssi $\dfrac{8x-13}{-x+4} \geqslant 0$.

x	$-\infty$		$13/8$		4		5
$8x-13$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+4$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{8x-13}{-x+4}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

$$\boxed{S = \left[\frac{13}{8}; 4\right[.}$$

Exercice 14 (2 points)

$n \leftarrow 0$
Tant que $n^3 < 50\,000$
    $n \leftarrow n+5$
Fin tant que
Afficher n

1. Faire tourner l'algorithme suivant à la main.

n	0	5	10	15	20	25	30	35	40
n^3	0	125	1000	3375	8000	15625	27000	42875	64000
Test $n^3 <$ 50000	v	v	v	v	v	v	v	v	f

2. Que renvoie cet algorithme ? Interpréter le résultat.

Il renvoie 40. Le plus petit multiple de 5 dont le cube est supérieur ou égal à 50000 est 40.

Exercice 15 (2 points)

On place 3000 euros à un taux d'intérêts annuel de 3,5%. Compléter la fonction Python pour que `duree(3000)` renvoie le nombre d'années de placement à partir duquel le montant obtenu devient supérieur ou égal à 4000.

```
def duree(montant):
    n=0
    while montant<4000 :
        montant=montant*1.035
        n=n+1
    return(n)
```

Exercice 16 (2 points)

Soient A, B, C trois points du plan tels que $3\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB}$.

$$\begin{aligned}
3\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{0}\\
3\overrightarrow{CA} - 2(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) &= \overrightarrow{0}\\
3\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{AB}) &= \overrightarrow{0}\\
\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{0}\\
-\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{0}\\
\overrightarrow{AC} &= -2\overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

2. Placer le point C sur la droite (AB).