

Term STL spécialité

Complément sur la dérivation

I Activité d'introduction

Exercice 1

1. Compléter le tableau de rappels sur la dérivation.

Expression de $f(x)$	a (constante)	x	x^2	x^n ($n \geq 1$)	$\frac{1}{x}$ ($x \neq 0$)	$\sqrt{x}$ ($x > 0$)
Expression de $f'(x)$						

Expression de $f(x)$	e^x	$\ln(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
Expression de $f'(x)$				

2. Des cas particuliers de dérivée d'une composée de fonctions
 u désigne une fonction dérivable sur un intervalle I , alors que a, b sont des réels.

Expression de $f(x)$	e^u	$\ln(u)$ ($u > 0$)	$\sin(ax + b)$	$\cos(ax + b)$
Expression de $f'(x)$				

3. Applications. Dériver les fonctions.

- (a) $f(x) = e^{0,01x+9}$
- (b) $f(x) = \ln(3x + 1)$
- (c) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2\pi}x + \pi\right)$
- (d) $f(x) = \cos(5x - 3)$

II Composition de fonctions

Définition

Soit u une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et prenant ses valeurs dans une partie J de $\mathbb{R}$. Soit g une fonction définie sur J .
 La composée de u suivie de g est la fonction f définie sur I par $f(x) = \dots\dots\dots$
 On la note $g \circ u$.

Illustration

.....

Exercice 2

Déterminer l'expression de la fonction.

- $f = g \circ u$ avec $g(x) = x^2$ et $u(x) = 2x + 3$.
- $h = g \circ u$ avec $g(x) = 2x + 3$ et $u(x) = x^2$
- $k = g \circ u$ avec $g(x) = 2x + 3$ et $u(x) = \sin x$

III Dérivée d'une composée de deux fonctions

Exercice 3

On reprend les fonctions de l'exercice précédent. Dériver les fonctions f , h et k .

Théorème

Soient $u : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions dérivables.

Alors la fonction $f : x \mapsto g(u(x))$ (qui est bien définie) est dérivable sur I et

$$\text{pour tout } x \in I, f'(x) = g'(u(x)) \times u'(x).$$

Cela s'écrit aussi $(g \circ u)' = (g' \circ u) \times u'$

Exercice 4 (démonstration)

On rappelle que le taux d'accroissement d'une fonction f entre x_0 et x est $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

1. Soit $x_0 \in I$. Écrire le taux d'accroissement de u entre x_0 et x .
2. Vérifier que le taux d'accroissement de $g \circ u$ entre x_0 et x s'écrit

$$\frac{g(u(x)) - g(u(x_0))}{u(x) - u(x_0)} \times \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}.$$

3. Passer à la limite lorsque $x \rightarrow x_0$ et conclure.

Propriété (cas particuliers)

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

Fonction g	Fonction $f = g \circ u$	Dérivée de f , soit $f' = (g \circ u)' = (g' \circ u) \times u'$
e^x	e^u	
$\ln(x)$	$(u > 0 \text{ sur } I)$	
$\sin(x)$		
$\cos(x)$		
x^n	$(n \text{ entier relatif})$ $(u \neq 0 \text{ pour } n \text{ négatif})$	
$\frac{1}{x}$	$(u \neq 0)$	

Exercice 5

Dériver les fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$.

1. $A(x) = e^{-9x+5}$
2. $B(x) = \ln(3x^2 - 11)$
3. $C(x) = \sin(1 - x^2)$
4. $D(x) = (5x + 4)^3$