Terminale STI. Spécialité. Correction du contrôle n° 3

Exercice 1 (questions de cours, 2 points)
Compléter sur l'énoncé.

1. Soit $f(x) = \mathrm{e}^x$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^x$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$
3. Pour tous réels a et b, $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b$

Exercice 2 (3 points)
Démontrer les égalités suivantes pour tout réel x :

1. $(\mathrm{e}^x + 1)(\mathrm{e}^{-x} - 1) = \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^x$.
   En développant,
   $(\mathrm{e}^x+1)(\mathrm{e}^{-x}-1) = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 1 = \mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 1 = 1 - \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 1 = \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^x$
2. $\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1} = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{1 + \mathrm{e}^{-x}}$.
   Il suffit de montrer que les produits en croix sont égaux.
   D'une part, $(\mathrm{e}^x - 1)(1 + \mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}x - x - 1 - \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$.
   D'autre part, $(\mathrm{e}^x + 1)(1 - \mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}x - x + 1 - \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$.
   Donc $\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1} = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{1 + \mathrm{e}^{-x}}$.

Exercice 3 (4 points)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.
1. $\mathrm{e}^{4x+1} = \mathrm{e}^{x-5}$ ssi $4x + 1 = x - 5$ ssi $3x = -6$ ssi $x = -2$. $S = \{-2\}$.
2. $\mathrm{e}^{2x+3} = \mathrm{e}$ ssi $\mathrm{e}^{2x+3} = \mathrm{e}^1$ ssi $2x + 3 = 1$ ssi $x = -1$. $S = \{-1\}$.
3. $\mathrm{e}^{-x} < \dfrac{1}{\mathrm{e}^3}$ ssi $\mathrm{e}^{-x} < \mathrm{e}^{-3}$ ssi $-x < -3$ ssi $x > 3$. $S =]3; +\infty[$.

Exercice 4 (5,5 points)
Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3 + x\mathrm{e}^x$.

1. Affirmation 1 : "pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = (1 + x)\mathrm{e}^x$".
   Pour dériver $x\mathrm{e}^x$, on rappelle la dérivée d'un produit de deux fonctions : $(uv)' = u'v + uv'$.
   $\boxed{g'(x) = 0 + 1 \times \mathrm{e}^x + x \times \mathrm{e}^x = (1 + x)\mathrm{e}^x. \text{ Vrai.}}$
2. Affirmation 2 : "La fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$."
   $\mathrm{e}^x > 0$ sur $\mathbb{R}$, donc $g'(x)$ a le même signe que $x + 1$.
   Et $x + 1 = 0$ ssi $x = -1$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$3 - \mathrm{e}^{-1}$	$\nearrow$	

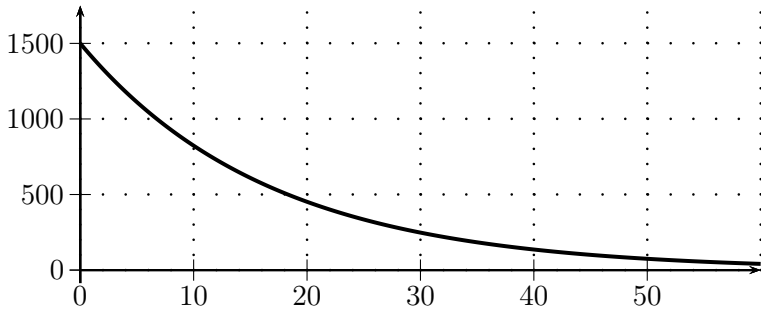
   $g(-1) = 3 + (-1) \times \mathrm{e}^{-1} = 3 - \mathrm{e}^{-1}$.
   $\boxed{\text{Faux, } g \text{ n'est pas croissante sur } \mathbb{R}.}$
   (elle est croissante sur $]-1; +\infty[$)
3. Affirmation 3 : "La fonction g admet un minimum égal à e".
   $\boxed{\text{Faux, le minimum de } g \text{ est } g(-1) = 3 - \mathrm{e}^{-1} \text{ d'après le tableau de variation.}}$

4. Affirmation 4 : "La tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x + 3$".
   On rappelle l'équation de la tangente : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
   $g(0) = 3 + 0\mathrm{e}^0 = 3$.
   $g'(0) = (1 + 0)\mathrm{e}^0 = 1 \times 1 = 1$.
   Donc $y = 1(x - 0) + 3 = x + 3$.
   $\boxed{\text{Vrai, la tangente en 0 a pour équation } y = x + 3.}$

Exercice 5 (5,5 points)

Une société souhaite tester un nouveau détecteur qui permet de mesurer la désintégration de noyaux radioactifs. On modélise le nombre de noyaux radioactifs (en milliards) présents dans un échantillon au bout de t heures après le début du test à l'aide de la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(t) = 1500\mathrm{e}^{-0,06t}$.

1. En utilisant la représentation graphique ci-contre, conjecturer la limite de la fonction f en $+\infty$.



   Il semble que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(t) = 0$.
2. Calculer $f'(t)$.
   On sait que $(\mathrm{e}^{kx})' = k\mathrm{e}^{kx}$.
   $f'(t) = 1500 \times (-0,06)\mathrm{e}^{-0,06t} = -90\mathrm{e}^{-0,06t}$.
3. En déduire les variations de la fonction f sur $[0; +\infty[$.
   Une exponentielle est toujours strictement positive.
   Donc $\mathrm{e}^{-0,06t} > 0$, et $f'(t) = -90\mathrm{e}^{-0,06t} < 0$.
   Donc f est strcitement décroissante sur $[0; +\infty[$.
4. (a) Calculer le nombre de noyaux présents dans l'échantillon radioactif 24 heures après le début du test. On arrondira à l'unité.
   $f(24) = 1500 \times \mathrm{e}^{-0,06\times 24} \approx 355,39 \approx 355$.
   Au bout de 24h, il reste environ 355 milliards de noyaux radioactifs.

   (b) Au bout de combien d'heures le nombre de noyaux radioactifs deviendra-t-il inférieur à la moitié du nombre de noyaux initialement présents dans l'échantillon ? On utilisera le tableau de valeurs de la calculatrice et on arrondira à l'heure près.
   $f(0) = 1500$, et $\dfrac{1500}{2} = 750$. La moitié du nombre de noyaux inital est de 750.
   On sait que f est décroissante, et avec la calculatrice, on obtient
   $f(11) \approx 775 > 750$
   $f(12) \approx 730 < 750$.
   Le nombre de noyaux radioactifs devient inférieur à la moitié du nombre initial au bout de 12 heures.

   (c) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$ et l'interpréter.
   On a $k = -0,06 < 0$. donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-0,06t} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(t) = 0$.
   Cela signifie qu'au bout d'un grand nombre d'heures, les noyaux radioactifs tendront à disparaître de l'échantillon.