**1G. Correction de l'interrogation de mathématiques n° 2**

## Exercice 1 (3 points)

Énoncer la propriété relative au signe d'une fonction trinôme du second degré. Soit $f$ une fonction du second degé définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.
On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta < 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $ax^2 + bx + c$ est du signe de $a$.
- Si $\Delta = 0$, alors pour tout $x \neq -\dfrac{b}{2a}$, $ax^2 + bx + c$ est du signe de $a$.
- Si $\Delta > 0$ , alors $ax^2 + bx + c$ est du signe de $a$ à l'extérieur des racines, et du signe de $(-a)$ entre les racines.

## Exercice 2 (11 points)

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.
On appelle $\mathcal{P}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec l'axe des abscisses.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 12 = 4 > 0$.
   $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4-2}{-2} = 3$.
   $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4+2}{-2} = 1$.
   La parabole coupe l'axe des abscisses en les points $A(1; 0)$ et $B(3; 0)$.

2. Étudier le signe de $f$ sur $\mathbb{R}$. Justifier.
   Le trinôme prend le signe de $a$ à l'extérieur des racines. Ici $a = -1 < 0$.

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

3. Dresser le tableau de variation de $f$. Justifier.
   $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-4}{-2} = 2$. $\beta = \dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{-4}{-4} = 1$.
   Le sommet de la parabole a pour coordonnées $S(2; 1)$.
   Comme $a = -1 < 0$, la parabole est tournée vers le bas.

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | ↗ | $1$ | ↘ | |

4. En déduire le meilleur encadrement de $f(x)$ lorsque $x \in [0; 5]$. Justifier.
   $f(0) = -0 + 0 - 3 = -3$, et $f(5) = -5^2 + 4 \times 5 - 3 = -8$.
   D'après la question précédente, le tableau de variation de $f$ sur $[0; 5]$ est donc

| $x$ | $0$ | | $2$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-3$ | ↗ | $1$ | ↘ | $-8$ |

   Sur l'intervalle $[0; 5]$, le minimum de $f$ est $-8$ et le maximum est $1$.
   Ainsi, pour tout $x \in [0; 5]$, $-8 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

5. Soit $(d)$ la droite d'équation $y = 2x - 3$.
   Étudier la position relative de la parabole $\mathcal{P}$ et de la droite $(d)$.
   On étudie le signe de $f(x) - (2x - 3)$.
   $f(x) - (2x - 3) = -x^2 + 4x - 3 - 2x + 3 = -x^2 + 2x$
   $f(x) - (2x - 3) = x(-x + 2)$.
   $x(-x + 2) = 0$ ssi $x = 0$ ou $x = 2$.
   Le trinôme $f(x) - (2x - 3)$ est du signe de $a$ (négatif) à l'extérieur des racines.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) - (2x - 3)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

   Donc $\mathcal{P}$ est en-dessous de $(d)$ sur $]\infty; 0[\cup]2; +\infty[$.
   Et $\mathcal{P}$ est au-dessus de $(d)$ sur $]0; 2[$.

6. Pour tout $a$ réel, on note $D_a$ la droite d'équation $y = ax$.
   Déterminer les valeurs de $a$ pour lesquelles $D_a$ et $\mathcal{P}$ n'ont pas de point d'intersection.
   $D_a$ et $\mathcal{P}$ n'ont pas de point d'intersection ssi l'équation $f(x) = ax$

n'a pas de solution.
$f(x) = ax$ ssi $-x^2 + 4x - 3 = ax$, soit $-x^2 + (4-a)x - 3 = 0$.
$\Delta = "b^2 - 4ac" = (4-a)^2 - 12 = a^2 - 8a + 16 - 12$
$\Delta = a^2 - 8a + 4$.
L'équation n'a pas de solution ssi $\Delta = a^2 - 8a + 4 < 0$.
On étudie ce trinôme de la variable $a$.
Son discriminant est $\Delta_2 = (-8)^2 - 4 \times 4 = 64 - 16 = 48$.
$a_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{8 - \sqrt{48}}{2} = 4 - 2\sqrt{3} \approx 0,54$.
$a_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{8 + \sqrt{48}}{2} = 4 + 2\sqrt{3} \approx 7,46$.
Le trinôme est positif (signe de "a") à l'extérieur des racines.

| $a$ | $-\infty$ | | $4-2\sqrt{3}$ | | $4+2\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta = a^2 - 8a + 4$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Donc $\Delta < 0$ ssi $a \in ]4 - 2\sqrt{3}; 4 + 2\sqrt{3}[$.

$\boxed{D_a \text{ et } \mathcal{P} \text{ n'ont pas de point d'intersection lorsque } a \in ]4 - 2\sqrt{3}; 4 + 2\sqrt{3}[.}$

**Exercice 3 (6 points)**

Une carte de vœux rectangulaire, de dimensions 6 cm et 10 cm, comporte un carré et un rectangle colorés représentés ici par des hachures. Afin de minimiser la quantité d'encre pour la partie colorée, on souhaite que la partie blanche soit la plus grande possible.
On note $x$ le côté du carré coloré.

1. Justifier que l'aire colorée est donnée par $f(x) = -2x^2 + 16x$.
   La partie colorée est formée d'un rectangle de dimensions $(10-x)$ et $(6-x)$, et d'un carré de côté $x$.
   Notons $f(x)$ son aire. La fonction $f$ est définie sur $[0; 6]$.
   $\boxed{\text{On a } f(x) = x^2 + (10-x)(6-x) = 2x^2 - 16x + 60.}$
2. Déterminer pour quelles valeurs de $x$ l'aire colorée ne dépasse pas la moitié de la surface totale.
   $\dfrac{10 \times 6}{2} = 30$.
   La moitié de l'aire totale représente 30 cm$^2$.
   On résout l'inéquation $2x^2 - 16x + 60 \leqslant 30$, soit $2x^2 - 16x + 30 \leqslant 0$, ou encore $x^2 - 8x + 15 \leqslant 0$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 4 \times 15 = 4 = 2^2 > 0$.
   $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{8-2}{2} = 3$.
   $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{8+2}{2} = 5$.
   Les deux racines appartiennent à l'intervalle $[0; 6]$.
   Le trinôme prend le signe de $a$ à l'extérieur des racines.

| $x$ | $0$ | | $3$ | | $5$ | | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 - 8x + 15$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

   $\boxed{\text{L'aire colorée ne dépasse pas la moitié de la surface de la carte pour } x \in [3; 5].}$
3. Déterminer les dimensions du carré et du rectangle colorés pour que l'aire colorée soit minimale.
   On cherche à rendre $f$ minimale. C'est une fonction du second degré.
   Comme $a = 2 > 0$, la parabole est tournée vers le haut.
   $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{16}{2 \times 2} = 4$. (on note que $4 \in [0; 6]$)
   Donc $f$ prend sa valeur minimale lorsque $x = 4$.
   La partie hachurée est formée d'un carré de côté $x$, et d'un rectangle de dimensions $(10-x)$ et $(6-x)$.
   $\boxed{\text{La partie colorée est minimale lorsqu'elle est constituée d'un carré de côté 4 cm et d'un rectangle de dimensions 6 cm et 2 cm.}}$