## 1re G. Correction du devoir maison n$^o$ 7

### Exercice 1

Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $AB = 9$, $AD = 6$, et $BD = 10$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.
   $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$.
   D'après la formule avec les normes utilisant $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$,
   $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(AB^2 + AD^2 - DB^2) = \frac{1}{2}(81 + 36 - 100) = \frac{17}{2}$.

2. En déduire la longueur de la diagonale $AC$.
   Comme $ABCD$ est un parallélogramme,
   $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
   D'après la formule du produit scalaire avec les normes utilisant $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, il vient

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} &= \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2 - AD^2) \\
\frac{17}{2} &= \frac{1}{2}(AC^2 - 81 - 36) \\
AC^2 &= 17 + 81 + 36 \\
AC^2 &= 134 \\
AC &= \sqrt{134}
\end{aligned}$$

### Exercice 2

Un organisateur annonce qu'à une loterie, il y aura exactement 1 billet gagnant 5000 euros, 5 billets gagnants 1000 euros et 50 billets gagnant 50 euros, sur un total de $N$ billets.
Le prix d'achat d'un billet est de 5 euros.
On note $X$ la variable aléatoire représentant le gain du joueur, c'est à dire le montant du lot gagné moins le prix du billet.

1. (a) Combien y a-t-il de billets non gagnants ?
   $1 + 5 + 50 = 56$. Il y a 56 billets gagnants.
   Il y a donc $N - 56$ billets non gagnants.

   (b) Quelles sont les valeurs possibles de $X$ ?
   $5000 - 5 = 4995$, $1000 - 5 = 995$, et $50 - 5 = 45$.
   Les valeurs possibles de $X$ sont donc $4995$ ; $995$ ; $45$ ; $-5$.

   (c) Déterminer, en fonction de $N$, la loi de probabilité de $X$.
   On a vu qu'il y a $N - 56$ billets perdants.
   Il y a équiprobabilité, $P(A) = \dfrac{\text{nb cas favorables}}{\text{nb cas total}}$
   $P(X = 4995) = \dfrac{1}{N}$. $P(X = 995) = \dfrac{5}{N}$.
   $P(X = 45) = \dfrac{50}{N}$. $P(X = -5) = \dfrac{N - 56}{N}$.
   La loi de $X$ se résume donc par le tableau suivant :

| $x_i$ | $4995$ | $995$ | $45$ | $-5$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{N}$ | $\frac{5}{N}$ | $\frac{50}{N}$ | $\frac{N-56}{N}$ |

2. Justifier que l'espérance de $X$ est donnée par
   $E(X) = \dfrac{12500}{N} - 5$.
   $E(X) = \sum x_i \times p_i$.
   $E(X) = \dfrac{4995 \times 1 + 995 \times 5 + 45 \times 50 - 5 \times (N - 56)}{N}$
   $E(X) = \dfrac{12500 - 5N}{N} = \dfrac{12500}{N} - 5$

3. L'organisateur prévoit de vendre la totalité des billets et il souhaite faire un bénéfice de 2000 euros.

   (a) Déterminer le nombre $N$ de billets à émettre.
   Le bénéfice de l'organisateur s'exprime par sa recette moins les coûts qui correspondent aux lots gagnants.
   On a donc $5 \times N - (5000 + 5 \times 1000 + 50 \times 50) = 2000$
   D'où $5N = 2000 + 12500$, puis $5N = 14500$, et $N = 2900$.
   $\boxed{\text{La loterie compte 2900 billets.}}$

   (b) En déduire la valeur exacte de $E(X)$.
   $\boxed{E(X) = \dfrac{12500}{2900} - 5 = \dfrac{-20}{29} \approx -0,69.}$

   (c) Calculer alors la probabilité de l'événement $A$ « le gain du joueur est au moins égal à 45 euros ».

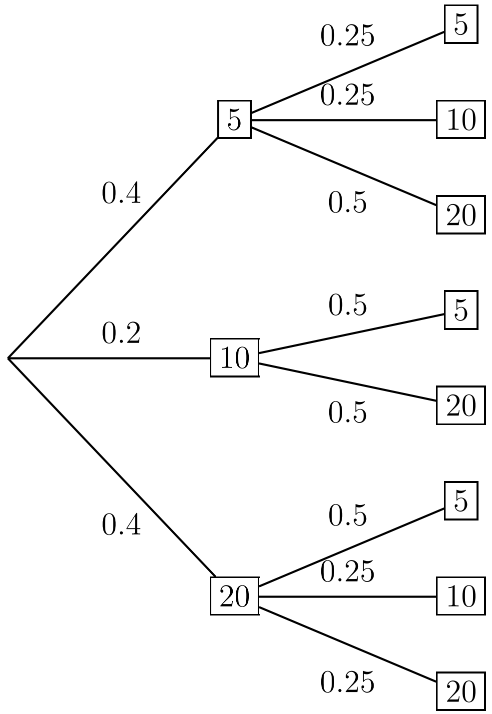
$P(A) = P(X \geqslant 45) = 1 - P(X = -5)$
$P(A) = 1 - \dfrac{2900-56}{2900} = \dfrac{56}{2900} = \dfrac{14}{725} \approx 0,019.$

| |
|---|
| Le joueur a environ 1,9% de chance de tomber sur un billet gagnant. |

**Exercice 3**

Dans un sac, on met 2 billets de 5 €, 1 billet de 10 €, et 2 billets de 20 €.
Pour avoir le droit de jouer, il faut payer 25 €.
On tire successivement et sans remise deux billets du sac.
À chaque étape, tous les billets présents dans le sac ont la même probabilité d'être choisis.

1. Représenter l'expérience à l'aide d'un arbre de probabilités.




2. Soit $X$ la variable aléatoire représentant le montant gagné par le joueur (en additionnant les deux billets tirés, et en tenant compte de la mise de départ).
Quelles sont les valeurs possibles pour $X$ ?
$10-25=-15$, $15-25=-10$, $25-25=0$, $30-25=5$, $40-25=15$.
$\boxed{X \text{ est à valeurs dans } \{-15; -10; 0; 5; 15\}.}$

3. Déterminer la loi de probabilité de $X$.
$P(X=-15) = 0.4 \times 0.25 = 0.1.$
$P(X=-10) = 0.4 \times 0.25 + 0.2 \times 0.5 = 0.2.$
$P(X=0) = 0.4 \times 0.5 + 0.4 \times 0.5 = 0.4.$
$P(X=5) = 0.2 \times 0.5 + 0.4 \times 0.25 = 0.2.$
$P(X=15) = 0.4 \times 0.25 = 0.1.$
D'où la loi de probabilité de $X$ :

| $x_i$ | $-15$ | $-10$ | $0$ | $5$ | $15$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0.1 | 0.2 | 0.4 | 0.2 | 0.1 |

4. Calculer l'espérance de $X$. Le jeu est-il intéressant (d'un point de vue financier) ?

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum x_i \times p_i \\ &= -15 \times 0.1 - 10 \times 0.2 + 0 \times 0.4 + 5 \times 0.2 + 15 \times 0.1 \\ &= -1.5 - 2 + 0 + 1 + 1.5 \\ &= -1 \end{aligned}$$

| |
|---|
| L'espérance de gain est de $-1$ €.<br>Comme $E(X) < 0$, le jeu n'est pas intéressant pour le joueur (il perd en moyenne 1 euro par partie). |