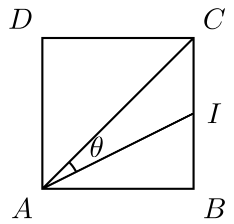
1G. Correction du dm9

Exercice 1

On considère un carré $ABCD$ de côté 1, et I le milieu de $[BC]$.

On note θ la mesure de l'angle $\widehat{IAC}$.



1. Calculer la valeur exacte de $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC}$.
   Dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$, on a $A(0;0)$, $B(1;0)$, $D(0;1)$.

   Comme $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

   Donc $C(1;1)$.
   Comme I est le milieu de $[BC]$,
   $x_I = \dfrac{x_B + x_C}{2} = 1$, et $y_I = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{1}{2}$.
   Donc $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}1\\1/2\end{pmatrix}$. On rappelle $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.
   En utilisant l'expression du produit scalaire en repère orthonormé,
   $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC} = xx' + yy' = 1 \times 1 + \dfrac{1}{2} \times 1 = \dfrac{3}{2}$.
   Autre méthode possible sans coordonnées : linéarité et relation de Chasles.

2. Montrer que la valeur exacte de $\cos\theta$ est $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

   On va exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC}$ avec la formule du cosinus.
   En appliquant deux fois le théorème de Pythagore, on montre facilement que $AC = \sqrt{2}$ et $AI = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.
   D'après la formule du cosinus,
   $$\begin{aligned}\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC} &= AI \times AC \times \cos\theta \\ &= \frac{\sqrt{10}}{2}\cos\theta\end{aligned}$$
   Ainsi, $\dfrac{\sqrt{10}}{2}\cos\theta = \dfrac{3}{2}$, donc $\cos\theta = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{2}{\sqrt{10}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}} = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.
   $\boxed{\cos\theta = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}.}$

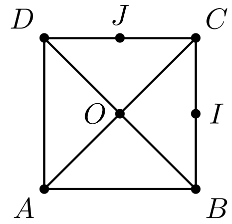
3. En déduire la valeur arrondie au degré près de l'angle θ.

   Avec la calculatrice, $\cos^{-1}\left(\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\right) \approx 18,43$.

   $\boxed{\text{Donc } \theta \text{ mesure environ 18 degrés.}}$

Exercice 2

Soit $ABCD$ un carré de centre O et de côté 5. On note I le milieu de $[BC]$ et J le milieu de $[CD]$



Calculer les produits scalaires suivants.

1. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}$.
   Le projeté orthogonal de $\overrightarrow{BD}$ sur la droite (BA) est $\overrightarrow{BA}$.
   Donc $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} = BA^2 = 5^2 = 25$.
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2 = 5^2 = 25$.
3. $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BI} = BI^2 = \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{25}{4}$.
4. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.
   Avec la formule du cosinus,
   $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = AC \times BD \times \cos\dfrac{\pi}{2} = AC^2 \times 0 = 0$.
   Dans cette situation, on peut donner le résultat directement, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ car les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux (les diagonales d'un carré sont perpendiculaires).
5. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$.
   Le projeté orthogonal de O sur (AB) est le milieu de $[AB]$.
   Donc, par projeté, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} \cdot \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} = AB \times \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{25}{2}$.
6. $\overrightarrow{CJ} \cdot \overrightarrow{IB} = 0$ car les vecteurs $\overrightarrow{CJ}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont orthogonaux.