1G – Spécialité mathématiques – Corrigé

1 Suites

Exercice 1
Partie A

1. Chaque mensualité coûte 300 euros de plus que la précédente,
donc, pour tout entier n non nul, $u_{n+1} = u_n + 300$.
La suite (u_n) est donc arithmétique de raison 300.
2. La suite (u_n) est arithmétique de raison 300 donc :
pour tout entier n non nul, $u_n = u_1 + 300(n-1)$.
De plus $u_1 = 8000$, donc pour tout entier n non nul, $u_n = 8000 + 300n - 300 = 300n + 7700$.
3. La somme totale remboursée en 10 ans par l'entreprise est : $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{120}$.
Or (u_n) est une suite arithmétique donc $S = 120\,\dfrac{u_1 + u_{120}}{2}$.
De plus $u_{120} = 300 \times 120 + 7700 = 43700$,
donc $S = 120\,\dfrac{8000 + 43700}{2} = 120 \times 25850 = 3102000$.
La somme totale remboursée par l'entreprise en 10 ans est donc de 3102000 euros.

Partie B

1. Chaque mois la mensualité augmente de 1 % ,
donc, pour tout entier n non nul, $v_{n+1} = v_n + \dfrac{1}{100}v_n = 1,01v_n$.
La suite (u_n) est donc géométrique de raison $1,01$.
2. La suite (u_n) est géométrique de raison $1,01$,
donc pour tout entier n non nul, $v_n = v_1 \times 1,01^{n-1}$.
3. Le versement total en 10 ans est de : $V = v_1 + v_2 + \cdots + v_{120}$.
Or (v_n) est une suite géométrique donc :
$V = v_1\,\dfrac{1 - 1,01^{120}}{1 - 1,01} = v_1\,\dfrac{1 - 1,01^{120}}{-0,01} = 100v_1(1,01^{120} - 1)$
4. Le versement total est de 3 000 000 si et seulement si $V = 3000000$.

$$\begin{aligned} V = 3000000 &\iff 100v_1(1,01^{120} - 1) = 3000000 \\ &\iff v_1 = \frac{30000}{1,01^{120} - 1} \\ &\iff v_1 \approx 13041,28 \end{aligned}$$

Pour un rembousement total de 3 000 000, le premier versement doit être de 13041,28 euros.

2 Fonction exponentielle

Exercice 2
Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = (x-1)(2 - \mathrm{e}^{-x})$.

1. (a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 2(1 - \mathrm{e}^{-x})$.
La fonction $x \mapsto -x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $x \mapsto \mathrm{e}{-x}$ l'est aussi.
Par somme et produit de fonctions dérivables, f est dérivable sur $[0; +\infty[$ (et même sur $\mathbb{R}$).
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times (2 - \mathrm{e}^{-x}) + (x-1) \times \mathrm{e}^{-x} \\ &= 2 + x\mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-x} \\ &= x\mathrm{e}^{-x} + 2(1 - \mathrm{e}^{-x}) \end{aligned}$$

(b) Justifier que pour tout $x > 0$, $1 - e^{-x} > 0$.
On résout l'inéquation

$$\begin{array}{rcl} 1 - e^{-x} & > & 0 \\ -e^{-x} & > & -1 \\ e^{-x} & < & 1 \\ e^{-x} & < & e^0 \\ -x & < & 0 \\ x & > & 0 \end{array}$$

$\boxed{\text{Donc pour tout } x > 0,\ 1 - e^{-x} > 0.}$

(c) En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[0; +\infty[$ (on précisera $f'(0)$).
Une exponentielle est toujours strictement positive, donc $e^{-x} > 0$.
Sur $]0; +\infty[$, $x > 0$ donc $xe^{-x} > 0$.
Or, on a vu que si $x > 0$, $1 - e^{-x} > 0$, et donc $2(1 - e^{-x}) > 0$.

Par somme de deux nombres strictement positifs, sur $]0; +\infty[$ $f'(x) > 0$. Enfin, $f'(0) = 0 + 2 \times (1 - 1) = 0$.

(d) Dresser le tableau de variation de f sur $[0; +\infty[$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$f(0) = -1 \times (2 - 1) = -1$.

2. Déterminer le point A où la tangente à la courbe représentative de f est parallèle à la droite Δ d'équation $y = 2x - 5$.
$f'(a)$ estle coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a.
La tangente à la courbe de f est parallèle à la droite Δ ssi elle a le même coefficient directeur, 2. On résout donc l'équation $f'(x) = 2$.

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & 2 \\ xe^{-x} + 2 - 2e^{-x} & = & 2 \\ (x-2)e^{-x} & = & 0 \\ (x-2) & = & 0 \\ x & = & 2 \end{array}$$

En effet, $e^{-x} > 0$.
On détermine l'ordonnée du point en calculant $f(2)$.
$f(2) = (2 - 1)(2 - e^{-2}) = 2 - e^{-2}$.

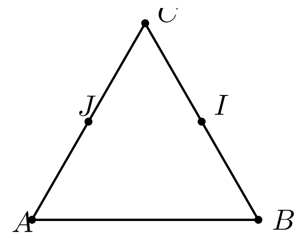
Il existe un unique point A en lequel la tangente à la courbe de f est parallèle à Δ, c'est en $A(2; 2 - e^{-2})$.

3 Produit scalaire et applications

Exercice 3
Soit ABC un triangle équilatéral de côté 6. On note I le milieu de $[BC]$, et J le milieur de $[AC]$.
Calculer les produits scalaires suivants (on justifiera soigneusement) :

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BI}$

3. $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{CJ}$



Exercice 4

1. Dans un repère orthonormé du plan, on donne les points $A(1;-1)$ et $B(-3;1)$.
Déterminer une équation de la hauteur issue de A dans le triangle OAB.
La hauteur (h_A) issue de A dans OAB est la droite passant par A et ayant $\overrightarrow{OB}$ pour vecteur normal.
Comme $B(-3,1)$, $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$.
Donc elle a une équation de la forme $-3x+y+c=0$ $(c\in\mathbb{R})$.
Or, $A\in(h_A)$.

$$\begin{aligned}-3\times1-1+c &= 0\\ c &= 4\end{aligned}$$

$\boxed{\text{La hauteur issue de } A \text{ a pour équation } -3x+y+4=0.}$

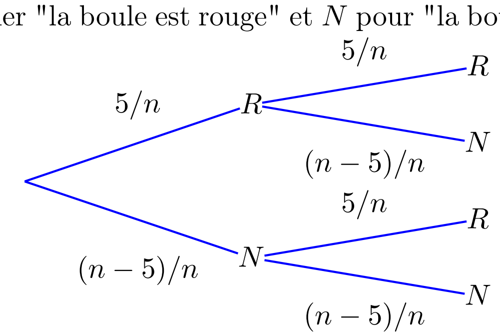
2. Justifier que les droites $\mathscr{D}_1 : 2x-y+1=0$ et $\mathscr{D}_2 : 3x+6y+5=0$ sont perpendiculaires.
$\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ est normal à $\mathscr{D}_1$.
$\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$ est normal à $\mathscr{D}_2$.
$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=2\times3-1\times6=0$.
Donc $\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n2}$.
$\boxed{\text{Les droites } \mathscr{D}_1 \text{ et } \mathscr{D}_2 \text{ sont perpendiculaires.}}$

4 Probabilité. Variable aléatoire

Exercice 5

Une urne comprend 5 boules rouges et $n-5$ boules noires, où $n\geqslant 5$.

1. Un joueur tire au hasard, successivement et **avec remise** deux boules de l'urne.
   (a) Soit A l'événement « les deux boules tirées sont de couleurs différentes ».
   En s'aidant d'un arbre, calculer la probabilité $p_n(A)$ de l'événement A.
   On note R pour désigner "la boule est rouge" et N pour "la boule est noire". $(\overline{R}=N)$.



$p_n(A)=p(R;N)+p(N;R)=2\times\dfrac{5}{n}\times\dfrac{n-5}{n}=\dfrac{10(n-5)}{n^2}$.

   (b) En étudiant les variations de la fonction f définie sur $[5;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{10(x-5)}{x^2}$, déterminer pour quelles valeurs de n le joueur a le plus de chances de réaliser A.
   Sur $[5;+\infty[$, x^2 ne s'annule pas.

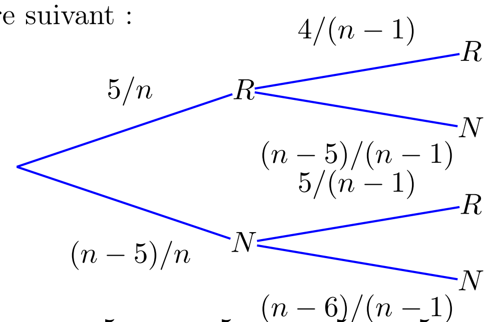
La fonction f est donc dérivable sur $[5;+\infty[$ par quotient de fonctions dérivables.
Pour tout $x \geqslant 5$, $f'(x) = 10 \times \dfrac{x^2-(x-5)\times 2x}{x^4} = 10 \times \dfrac{-x^2+10x}{x^4} = 10 \times \dfrac{x(10-x)}{x^4}$.
$10 > 0$, et sur $[5;+\infty[$ $x>0$ et $x^4>0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $(10-x)$.

x	5		10		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$1/2$	$\searrow$	

$f(5)=0$, et $f(10) = \dfrac{10\times 5}{10^2} = \dfrac{1}{2}$. On en déduit que la prbabilité $p_n(A)$ est maximale lorsqu'il y a 10 boules dans l'urne (5 rouges et 5 noires).

Dans ce cas, la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes est $p_{10}(A) = \dfrac{1}{2}$.

2. Un joueur tire au hasard, successivement et **sans remise** deux boules de l'urne.
   (a) On note B l'événement « les deux boules tirées sont de couleurs différentes ».
   En s'aidant d'un arbre, calculer la probabilité $p_n(B)$ de l'événement B.
   Pour $n=5$, il n'y a que des boules rouges dans l'urne, donc il est impossible de tirer deux boules de couleurs différentes, donc $p_5(B)=0$.
   Pour $n \geqslant 6$, on a l'arbre suivant :



$p_n(B) = p(R;N)+p(N;R) = \dfrac{5}{n}\times\dfrac{n-5}{n-1)} + \dfrac{n-5}{n}\times\dfrac{5}{n-1} = \dfrac{10(n-5)}{n(n-1)}$.

   (b) Le joueurs gagne 2 euros s'il réalise B et perd 1 euros dans le cas contraire.
   Soit X le gain algébrique du joueur. Montrer que $E(X) = \dfrac{-n^2+31n-150}{n^2-n}$.
   Déterminer la composition de l'urne pour que le jeu soit équitable.
   La loi de probabilité de X est résumée par le tableau :

x_i	2	-1
$p(X=x_i)$	$\dfrac{10(n-5)}{n(n-1)}$	$1-\dfrac{10(n-5)}{n(n-1)}$

$$\begin{aligned}
E(X) &= \Sigma x_i \times p_i \\
&= 2\times\frac{10(n-5)}{n(n-1)} - 1\times\left(1-\frac{10(n-5)}{n(n-1)}\right) \\
&= 3\times\frac{10(n-5)}{n(n-1)} - 1 \\
&= \frac{30(n-5)-n(n-1)}{(n(n-1)} \\
&= \frac{-n^2+31n-150}{n^2-n}
\end{aligned}$$

Le jeu est équitable ssi $E(x)=0$ ssi $-n^2+31n-150=0$.
On résout l'équation du second degré $-x^2+31x-150=0$.
$\Delta = b^2-4ac = 31^2-4\times 150 = 361 = 19^2 > 0$.

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 25.$
$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 6.$
On obtient deux solutions entières et supérieures ou égales à 6 (on garde les deux).
Le jeu est équitable pour $n = 6$ (5 rouges, 1 noire) et pour $n = 25$ (5 rouges, 20 noires).

5 Dérivation

Calculer l'expression de la dérivée des fonctions suivantes.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$.
   $\boxed{f'(x) = 4x^3 - 6x^2.}$
2. f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = (x^2-1)\sqrt{x}$.
   $\boxed{f'(x) = 2x\sqrt{x} + (x^2-1) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{5x^2-1}{2\sqrt{x}}.}$
3. f est définie sur $]4; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5}{8-2x}$.
   $\boxed{f'(x) = 5 \times \dfrac{-(-2)}{(8-2x)^2} = \dfrac{10}{(8-2x)^2}.}$
4. f est définie sur $]5; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2-3x}{x-5}$.
   $\boxed{f'(x) = \dfrac{(2x-3)(x-5)-(x^2-3x)\times 1}{(x-5)^2} = \dfrac{x^2-10x+15}{(x-5)^2}.}$

Exercice 6
Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction racine carrée définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
Soit (d) la droite d'équation $y = \dfrac{1}{4}x - 1$.

1. Montrer qu'il existe une unique tangente à la courbe $\mathscr{C}$ parallèle à la droite (d).
   La tangente est parallèle à (d) ssi elle a le même coefficient directeur.
   Soit $x > 0$.
   On résout l'équation $f'(x) = \dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{4}$, d'où $\sqrt{x} = 2$, et $x = 4$.
   $\boxed{\text{Il y a une seule tangente à } \mathscr{C} \text{ qui soit parallèle à } (d)\text{, c'est la tangente au point d'abscisse } 4.}$
2. Déterminer une équation de cette tangente.
   $y = f'(4)(x-4) + f(4) = \dfrac{1}{4}(x-4) + 2 = \dfrac{1}{4}x + 1.$
   $\boxed{\text{La tangente parallèle à } (d) \text{ est la droite d'équation } y = \dfrac{1}{4}x + 1.}$

Exercice 7
Soit f la fonction définie sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.

1. Calculer le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
   $f'(a)$ est le coeficient directeur de la tangente au point d'abscisse a.
   Pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.
   Donc $f'(1) = -\dfrac{1}{1^2} = -1$.
   $\boxed{\text{Le coefficient directeur demandé est } f'(1) = -1.}$
2. Montrer que pour tout réel $a \neq 0$, la tangente T_a à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a a pour équation réduite $y = -\dfrac{1}{a^2}x + \dfrac{2}{a}$.

Soit $a \neq 0$.

$$\begin{aligned} y &= f'(a)(x-a)+f(a) \\ &= \frac{-1}{a^2}(x-a)+\frac{1}{a} \\ &= \frac{-1}{a^2}x+\frac{1}{a}+\frac{1}{a} \\ &= -\frac{1}{a^2}x+\frac{2}{a} \end{aligned}$$

$\boxed{T_a \text{ a pour équation réduite } y = -\frac{1}{a^2}x+\frac{2}{a}.}$

3. En déduire le nombre de tangentes à $\mathscr{C}_f$ qui passent par le point $K(-1;2)$ (On ne demande pas de déterminer une équation de ces tangentes).
   Soit $a \neq 0$.
   $K(-1;2) \in T_a$ ssi $2 = -\frac{1}{a^2} \times (-1) + \frac{2}{a}$.
   ssi $2 = \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a}$
   ssi $2 = \frac{1+2a}{a^2}$
   ssi $2a^2 - 2a - 1 = 0$.
   C'est un équation du second degré d'inconnue a.
   $\Delta = "b^2 - 4ac" = (-2)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 12 > 0$.
   Cette équation admet donc deux solutions distinctes.
   $\boxed{\text{Il existe donc deux tangentes à } \mathscr{C}_f \text{ qui passent par le point } K(-1;2).}$

Exercice 8 (8 points)

On a tracé ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
La droite T_1 est tangente à la courbe en B, et la courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point A.

A : Lectures graphiques

1. Lire graphiquement $f(-2)$ et $f(0)$. Aucune justification n'est demandée.
   $\boxed{f(-2) = -7 \text{ et } f(0) = -4.}$
2. Déterminer graphiquement $f'(-2)$ et $f'(0)$. Justifier.
   $f'(-2)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse -2, c'est donc le coefficient directeur de T_1. $\boxed{\text{Donc } f'(-2) = 3,5.}$
   $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente au point A. Cette tangente est parallèle à l'axe des abscisses. $\boxed{f'(0) = 0.}$

B : Calculs de dérivées et applications

On admet désormais que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4$.

1. Calculer $f'(x)$.
   $\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{1}{8} \times 3x^2 - \frac{1}{2} \times 2x - 0 = \frac{3}{8}x^2 - x.}$
2. Vérifier que $f'(4) = 2$ et tracer la tangente associée sur le graphique. On fera apparaître les traits de construction.
   $\boxed{f'(4) = \frac{3}{8} \times 4^2 - 4 = 3 \times 2 - 4 = 2.}$
   On trace la tangente à la courbe au point d'abscisse 4.
   Comme $f'(4) = 2$, son coefficient directeur est 2.
3. (a) Montrer que la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2 est la droite (d) d'équation $y = -\frac{1}{2}x - 4$.
   $f'(2) = \frac{3}{8} \times 2^2 - 2 = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$.

$f(2)=\dfrac{1}{8}\times 2^3-\dfrac{1}{2}\times 2^2-4=1-2-4=-5.$

$y=f'(2)(x-2)+f(2)=-\dfrac{1}{2}(x-2)-5=-\dfrac{1}{2}x-4.$

$\boxed{\text{La tangente } (d) \text{ à la courbe de } f \text{ au point d'abscisse 2 a bien pour équation } y=-\dfrac{1}{2}x-4.}$

(b) Tracer (d).

x	0	2
y	-4	-5

(c) Étudier par le calcul la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de (d).

On étudie le signe de $f(x)-(-\dfrac{1}{2}x-4)$.

$$\begin{aligned} f(x)-(-\frac{1}{2}-4) &= \frac{1}{8}x^3-\frac{1}{2}x^2-4+\frac{1}{2}x+4 \\ &= \frac{1}{8}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x \\ &= \frac{1}{8}x\times(x^2-4x+4) \\ &= \frac{1}{8}x(x-2)^2 \end{aligned}$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$\frac{1}{8}x$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-2)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$\frac{1}{8}x(x-2)^2$		$-$	0	$+$	0	$+$	

$\mathscr{C}_f$ et (d) se coupent aux points d'abscisses 0 et 2.
Sur $]-\infty;0[$, $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de (d).
Sur $]0;2[\,\cup\,]2;+\infty[$, $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de (d).