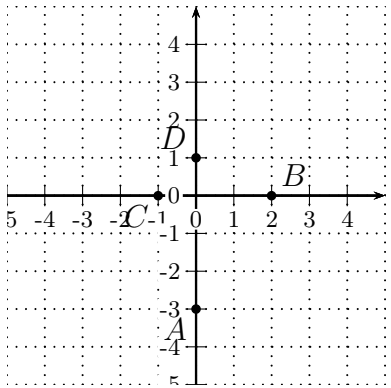
Terminale STI. Correction du DM1 de spécialité

Exercice 1

1. Placer dans le repère ci-dessous les points A, B, C, D d'affixes respectives $z_A = -3\mathrm{i}$; $z_B = 2$, $z_C = -1$ et $z_D = \mathrm{i}$.



2. En déduire, sans calcul, le module et un argument pour chacun des nombres complexes z_A ; z_B, z_C, et z_D.

$\lvert z_A\rvert = 3$	$\arg(z_A) = -\dfrac{\pi}{2}$
$\lvert z_B\rvert = 2$	$\arg(z_B) = 0$
$\lvert z_C\rvert = 1$	$\arg(z_C) = \pi$
$\lvert z_D\rvert = 1$	$\arg(z_D) = \dfrac{\pi}{2}$

Exercice 2

Soient les points E, F, G d'affixes respectives $z_E = 4$, $z_F = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_G = \overline{z_F}$.
Calculer les longueurs EF, EG, et FG, puis en déduire la nature du triangle EFG.

$z_G = \overline{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}} = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$
$EF = |z_F - z_E| = |1 - \mathrm{i}\sqrt{3} - 4| = |-3 - \mathrm{i}\sqrt{3}| = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
$EG = |z_G - z_E| = |1 + \mathrm{i}\sqrt{3} - 4| = |-3 + \mathrm{i}\sqrt{3}| = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
$FG = |z_G - z_F| = |1 + \mathrm{i}\sqrt{3} - (1 - \mathrm{i}\sqrt{3})| = |2\mathrm{i}\sqrt{3}| = \sqrt{4 \times 3}$
$FG = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

$\boxed{\text{Comme } EF = EG = FG, \text{ le triangle } EFG \text{ est équilatéral.}}$

Exercice 3

1. On donne $z = -5 + 5\mathrm{i}$ sous forme algébrique.

   (a) Mettre z sous forme trigonométrique. Justifier.
   On a $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.
   Notons θ un argument de z.
   $\cos\theta = \dfrac{a}{r} = \dfrac{-5}{5\sqrt{2}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$.
   $\sin\theta = \dfrac{b}{r} = \dfrac{5}{5\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   On en déduit que $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$.
   $\boxed{\text{Donc } z = 5\sqrt{2}\left(\cos(\frac{3\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(\frac{3\pi}{4})\right) = \left[5\sqrt{2}; \frac{3\pi}{4}\right].}$

   (b) En déduire la forme trigonométrique de $\overline{z}$.
   $\overline{z}$ a le même module et un argument opposé à celui de z.
   $\boxed{\overline{z} = \left[5\sqrt{2}; -\frac{3\pi}{4}\right]}$

2. Mettre de même $Z = 2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}$ sous forme trigonométrique. Justifier.
   $r = |Z| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{12+4} = 4$.
   $\cos\theta = \dfrac{a}{r} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
   $\sin\theta = \dfrac{b}{r} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$
   Donc $\theta = -\dfrac{\pi}{6}$.
   $\boxed{Z = 4\left(\cos(-\frac{\pi}{6}) + \mathrm{i}\sin(-\frac{\pi}{6})\right).}$

Exercice 4

Soit $z = 5(\cos\dfrac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6})$.
Mettre z sous forme algébrique. Justifier.
$a = r\cos\theta = 5\cos\dfrac{\pi}{6} = 5 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$.
$b = r\sin\theta = 5\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5}{2}$.

$\boxed{\text{Donc sous forme algébrique, } z = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}.}$