

# Term STL. Spécialité

## Équations différentielles

### Introduction

De nombreux phénomènes scientifiques peuvent être modélisés par une relation entre une fonction  $f$  et sa dérivée  $f'$ .

Rechercher cette fonction  $f$  revient à résoudre une équation différentielle.

Exemples :

- On étudie la croissance d'une culture bactérienne en milieu liquide non renouvelé. Le nombre  $N(t)$  de bactéries par millilitre à l'instant  $t$  (en secondes) vérifie, pour tout réel  $t \geq 0$  la relation :  $N'(t) = 0,2N(t)$ .
- Le carbone 14, noté  $^{14}\text{C}$ , est un isotope radioactif qui sert à la datation en archéologie et en géologie. La méthode repose sur le fait que tout au long de leur vie, les organismes vivants assimilent du  $^{14}\text{C}$  et, quand ils meurent, le  $^{14}\text{C}$  qu'ils ont accumulé commence à se désintégrer : le nombre d'atomes décroît alors avec une vitesse proportionnelle au nombre d'atomes. On admet que l'évolution du  $^{14}\text{C}$  dans un échantillon de matière organique est modélisée par une fonction  $N$  dérivable sur  $[0; +\infty[$  et qui vérifie :  $N'(t) + 0,121N(t) = 0$  où  $N(t)$  est le nombre d'atomes de  $^{14}\text{C}$  existant à l'instant  $t$ , exprimé en milliers d'années.

## I Généralités

### Définition

- Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue (souvent notée  $y$ ) est une fonction, et qui donne une relation entre  $y$ , sa dérivée  $y'$  (éventuellement  $y''$ , des dérivées successives), et la variable  $x$  sur un intervalle donné.
- Une fonction qui vérifie l'équation différentielle est une solution de cette équation.
- Résoudre une équation différentielle consiste à déterminer toutes les solutions de l'équation.

### Exercice 1

Soit l'équation différentielle suivante, d'inconnue  $y$  :  $y'(x) = 4x + 1$ .

Vérifier que la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $F(x) = 2x^2 + x + 3$  est une solution de cette équation différentielle.

Exemple :

1.  $2y - xy' = 0$  est une équation différentielle linéaire du 1<sup>er</sup> ordre, à coefficients non constants.
2.  $\frac{dy}{dx} + y^2 = 0$  est une équation différentielle non linéaire du 1<sup>er</sup> ordre à coefficients constants. La notation  $\frac{dy}{dx}$  est souvent utilisée en physique.
3.  $y'' + 5y = 0$  est une équation différentielle linéaire du 2<sup>d</sup> ordre à coefficients constants.

### Exercice 2

Reconnaître parmi ces 3 fonctions celles qui sont solutions de l'équation différentielle  $y' + 2y = 4$ .

$F(x) = 2e^{-x} + 4$ ;  $G(x) = 2e^{-2x} + 2$ ;  $H(x) = e^{-2x} + 2$ .

### Exercice 3

Reconnaître parmi ces 3 fonctions celles qui sont solutions de l'équation différentielle  $y' + y = 4x$ .

$$f(x) = 2e^{-x} + 4x + 4; \quad g(x) = 2e^{-2x} - 4x - 4; \quad h(x) = 2e^{-x} + 4x - 4$$

### Exercice 4

Trouver une solution des équations différentielles suivantes.

1.  $y' = 0$
2.  $y' = y$
3.  $y' + y = 7x + 7$

### Exercice 5

Montrer que la fonction  $g$  définie par  $g(x) = xe^{-x}$  est une solution particulière de l'équation  $y' + y = e^{-x}$ .

## II Équations différentielles $y' = ay + b$ , avec $a$ et $b$ réels

### Théorème (Équation $y' = ay$ )

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Les solutions de l'équation  $y' = ay$  sont les fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = ke^{ax}$  où  $k \in \mathbb{R}$ .

### Exercice 6

Résoudre les équations différentielles.

1.  $y' = -4y$
2.  $2y' - y = 0$

### Remarque

Pour chaque équation différentielle, il y a une infinité de solutions (autant que de réels  $k$ ). Si l'on impose une condition initiale  $f(x_0) = y_0$ , alors la valeur de  $k$  est fixée et l'équation n'a qu'une seule solution.

### Exercice 7

Résoudre l'équation différentielle  $y' + 2y = 0$  telle que  $y(0) = -1$ .

### Théorème (Équation $y' = ay + b$ )

Soient  $a$  et  $b$  deux réels. Les solutions de l'équation  $y' = ay + b$  sont les fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$  où  $k \in \mathbb{R}$ .

### Remarque

Comme précédemment, l'équation  $y' = ay + b$  admet une infinité de solutions. Avec en plus une condition initiale  $y(x_0)$  donnée, elle a une unique solution vérifiant la condition initiale.

### Exercice 8

1. Résoudre l'équation différentielle  $y' = 3y + 5$ .
2. Déterminer la solution de l'équation différentielle  $y' + y = -2$  qui vérifie  $y(0) = 5$ .